

La Cappella Palatina svelata. Metodi e strumenti per l'interpretazione geometrica della Cattedrale di Aachen

Martina Attenni, Carlo Bianchini, Marika Griffò

Abstract

Lo studio presenta un flusso di lavoro integrato che combina il rilievo digitale e la modellazione 3D per l'analisi geometrica delle superfici architettoniche, con applicazione al sistema voltato della Cappella Palatina, nucleo carolingio della Cattedrale di Aachen. Dal 2022, è stata avviata una ricerca collaborativa che ha portato alla realizzazione di un esteso rilievo tridimensionale dell'intero complesso. Sulla base di questi dati, l'indagine ha affrontato la morfologia delle strutture voltate, concentrandosi sulla loro genesi geometrica. La cappella è organizzata attorno a un ottagono centrale a tripla altezza, circondato da due deambulatori che mediano la transizione verso un perimetro poligonale a 16 lati. L'ambulacro inferiore, coperto da volte a crociera su campate quadrangolari e triangolari alternate, genera uno spazio altamente permeabile. L'ambulacro superiore risulta invece più articolato, definito da archi a tutto sesto che strutturano il ritmo spaziale in pianta e in alzato, con cappelle radiali e settori triangolari di raccordo. L'analisi ha distinto i principi geometrici delle volte triangolari e quadrangolari, mettendo a confronto i dati di rilievo con modelli teorici. Il flusso di lavoro proposto si è dimostrato efficace nel collegare la conoscenza costruttiva di quell'epoca con l'analisi morfologica, chiarendo la relazione tra l'intento progettuale e la forma costruita. I risultati forniscono nuove evidenze sui processi costruttivi medievali, sui modelli di riferimento e sulle competenze tecniche necessarie per realizzare sistemi voltati complessi.

Parole chiave: rilievo e modellazione 3D, volte altomedievali, Cappella Palatina, Cattedrale di Aachen, stereotomia

Introduzione

Nel quadro del più vasto *Aachen Cathedral Project* [1], lo studio si concentra sulle volte degli ambulacri anulari che contornano il grande ottagono centrale della Cappella Palatina, con l'obiettivo di indagarne la geometria e la logica costruttiva. Come illustrato da Schindler [Pieper, Schindler 2017], la cappella propone un'articolazione verticale a più livelli sia per la cintura esterna degli ambulacri, sia per l'ottagono centrale. A questa segmentazione in alzato si aggiunge una sequenza orizzontale che, livello per livello, distingue zone via via meno "pubbliche" dall'ingresso verso le aree riservate ai celebranti (fig. 1).

Al piano terra è possibile identificare un ambulacro radiale composto da una successione di ambienti poligonali alti un

piano, probabilmente riservati ai fedeli come in una chiesa parrocchiale (in blu e azzurro) contrapposti a uno spazio a tripla altezza interno all'ottagono centrale riservato invece ai chierici (in verde). Al piano superiore, dato il vuoto centrale, lo schema distributivo prevedeva il settore addossato al *Westwerk* riservato all'imperatore mentre il resto dell'ambulacro era probabilmente destinato a ospitare i componenti della corte. Opposti al *Westwerk* su entrambi i livelli erano invece collocati gli altari (in rosso) che risultavano entrambi visibili dal trono imperiale.

Come già discusso [Bianchini 2024], questa conformazione spaziale della Cappella Palatina si dimostra altamente dissonante per effetto proprio delle opposte tensioni tra gli

ambulacri. Queste tensioni, centripete al piano terra, centrifughe al primo piano, sembrano trovare solo nel vuoto centrale a tripla altezza una loro instabile composizione. Assieme ad altre evidenze, questo sofisticato impianto porta a ipotizzare che la Cappella Palatina sia il prodotto di un programma estremamente chiaro nella mente del progettista che rigorosamente calibra il ruolo, la forma e il funzionamento delle varie componenti architettoniche proprio in funzione del perseguimento di tale obiettivo. La inusuale geometria che si ritrova nel complesso sistema voltato degli ambulacri, oltre a rivelare conoscenze e competenze apparentemente non coerenti con il *know-how* dell'VIII secolo, rafforza l'idea che la Cappella Palatina sia il prodotto di un progetto unitario, sostanzialmente olografo e rigorosamente controllato dalla progettazione alla realizzazione. Questo suggerisce l'esistenza di un unico progettista dotato di forte autonomia che sembra rispondere al nome di Odone da Metz.

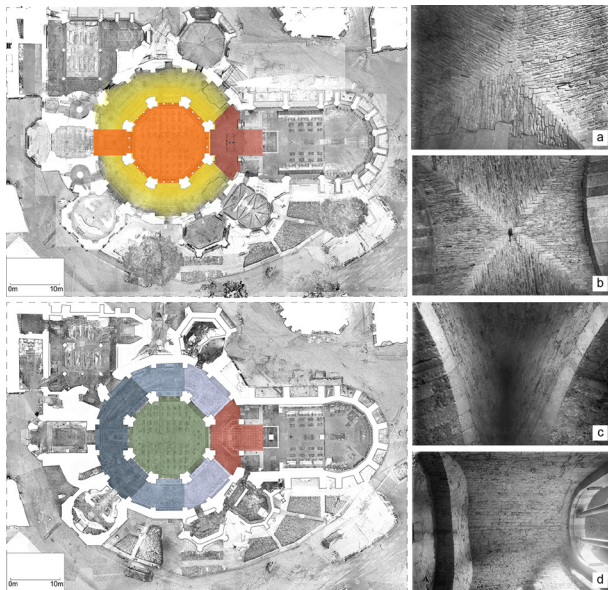


Fig. 1. A sinistra: organizzazione degli spazi della Cappella Palatina secondo Schindler: piano terra per fedeli (blu) e chierici (verde); oratorio imperiale ottagonale (arancio); primo piano per la corte (giallo); santuari ai due livelli (rosso). A destra: le tipologie di volte (© Archivio della Cattedrale di Aachen).

La Cappella Palatina

La Cappella Palatina costituisce il manifesto del programma politico e religioso di Carlo Magno, riprendendo, in parte, modelli di tradizione tardoantica e bizantina precedenti l'avvio del cantiere e noti all'imperatore [Ulrike, Beckmann 2012] e introducendo soluzioni originali nei sistemi voltati, che la rendono un *unicum* nel panorama architettonico dell'VIII-IX secolo. Il confronto con gli edifici coevi conferma questa peculiarità [Pieper, Schindler 2017; Attenni et al. 2023]. A differenza di quanto avviene nella Basilica di San Vitale a Ravenna, ad esempio, dove le gallerie sono arretrate e la cupola è alleggerita con tubi fittili, ad Aachen la muratura è integralmente in conci di pietra e laterizi, e la continuità spaziale degli ambulacri fino al cuore ottagonale conferisce all'insieme una marcata unità visiva e distributiva. Altri esempi di architettura a pianta centrale, come il Mausoleo di Santa Costanza a Roma o la Basilica di San Gereone a Köln, condividono con la Cappella carolingia la ricerca di un'unità compositiva ma non presentano una sperimentazione paragonabile sotto il profilo delle soluzioni costruttive e geometriche. In questo senso, la Cappella Palatina può essere considerata non solo come rielaborazione di modelli esistenti, ma come momento di avanzata sperimentazione geometrica e costruttiva, e la differenziazione tra i due livelli dell'ambulacro rende particolarmente evidente questa ricerca. Al piano inferiore si sviluppa un sistema di volte a crociera (figg. 1a, 1b), disposte su campate quadrangolari e triangolari, che garantiscono una continuità visiva e distributiva in linea con la funzione processionale dello spazio. Al contrario, al piano superiore lo spazio appare più articolato: archi a tutto sesto collegano i pilastri interni a quelli addossati alla muratura esterna, suddividendo l'ambulacro in campate chiaramente definite (figg. 1c, 1d). Qui le cappelle radiali introducono un'alternanza tra spazi aperti e altri più raccolti, destinati a funzioni liturgiche specifiche, mentre i settori triangolari costituiscono elementi di connessione tra le volte a botte inclinate e la maglia strutturale esterna.

Obiettivi della ricerca

Le campagne di rilievo condotte dal 2022 al 2024 hanno fornito un modello numerico tridimensionale, la cui analisi geometrica ha reso evidente come i diversi sistemi voltati siano stati concepiti secondo logiche geometriche distinte ma coordinate, esprimendo un'articolazione progettuale che travalica la semplice funzione strutturale.

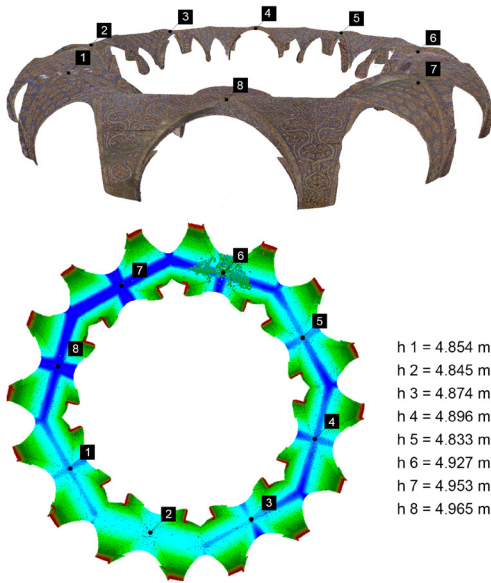


Fig. 2. In alto: vista del modello numerico delle volte a crociera; in basso: visualizzazione della elevation map e analisi delle quote dei colmi delle volte su base quadrangolare (elaborazione degli autori).

La ricerca si pone un duplice obiettivo: da un lato, chiarire i principi generativi delle diverse tipologie di volte; dall'altro, indagarne il significato nel quadro più ampio della cultura architettonica carolingia, valutando se derivino da conoscenze consapevoli o da risposte pragmatiche ai vincoli costruttivi e distributivi. Lo studio definisce il ruolo della Cappella Palatina come laboratorio di sperimentazione geometrica, capace di integrare esigenze statiche, simboliche e funzionali in un linguaggio architettonico innovativo.

Genesi geometrica delle volte a crociera

L'ambulacro inferiore della cappella Palatina si presenta come un anello continuo che circonda l'ottagono centrale, scandito da campate di forma quadrangolare e triangolare, coperte da volte a crociera. La prima ipotesi valutata considerava tali superfici come il risultato dell'intersezione tra una volta anulare e superfici cilindriche radiali. La

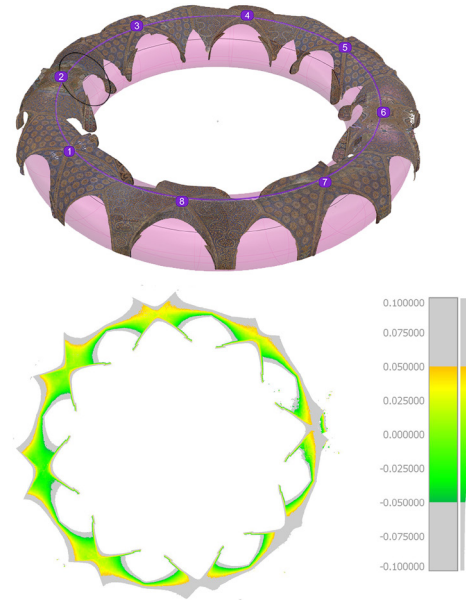


Fig. 3. In alto: modellazione della volta anulare; in basso: distanza cloud-to-mesh nel range di ± 5 cm (elaborazione degli autori).

verifica di questa ipotesi è stata condotta analizzando direttamente i dati di rilievo, visualizzando i valori delle quote dei colmi messi in evidenza dalla *elevation map* [2]. La visualizzazione di questi valori ha messo in evidenza che i colmi non si collocano tutti sullo stesso piano né su un'unica circonferenza come ci si aspetterebbe da una costruzione derivata da un toro. Per confermare l'affidabilità del risultato, queste evidenze grafiche sono state verificate tramite misurazioni sulla nuvola di punti, concentrando l'attenzione sulla verifica diretta della regolarità delle quote all'intradosso dei colmi delle volte. Le altezze misurate variano tra un minimo di 4,83 m (campata 5) e un massimo di 4,96 m (campata 8), con uno scarto complessivo di circa 13 cm. Per la maggior parte delle campate (dalla 1 alla 5 e dalla 6 alla 8) lo scostamento si mantiene entro un valore pari a $\pm 2-3$ cm, ma tra le campate 5 e 6 si registra una discontinuità più marcata, che potrebbe riflettere una fase di cantiere differenziata o una successiva deformazione della struttura (fig. 2).

Per verificare che i colmi non sono effettivamente disposti lungo una circonferenza, si è proceduto con la costruzione di un toro ideale ottenuto dallo scorrimento di una circonferenza costruita come la media delle circonferenze ottenute sezionando il tracciato dell'anello con piani verticali radiali: tale circonferenza ha un raggio di 2,32 m, risultato dalla media di raggi compresi tra 2,27 e 2,38 m.

La comparazione tra la superficie così generata e la nuvola di punti ha evidenziato scostamenti significativi: solo una ridotta porzione dei dati rientrava in un range di tolleranza di ± 5 cm (fig. 3). Questo risultato, corroborato dalla lettura delle *elevation maps*, ha portato a scartare l'ipotesi di una generazione anulare delle crociere. Un'ulteriore conferma si ottiene interpolando i colmi delle volte a crociera all'interno di un poligono. Questo poligono risulta essere un ottagono con i lati che mediamente misurano 8,85 m, ad eccezione di uno, che presenta una lunghezza maggiore (8,99 m) e che richiama, per ovvie ragioni, l'ottagono che definisce l'impianto originario della Cappella Palatina [Buchkremer 1955]. Scartata l'ipotesi del toro, l'analisi è stata orientata verso la ricostruzione delle crociere come intersezione di superfici cilindriche.

Per le volte a crociera impostate su base quadrangolare, sono stati individuati due cilindri con raggi rispettivamente pari a 2,52 m e 2,32 m, le cui intersezioni definiscono i profili delle nervature di imposta. Per le crociere su base triangolare, invece, è stato necessario considerare un sistema più complesso, derivato dall'intersezione di tre cilindri: due in continuità con le volte quadrangolari, di raggio 2,33 m, e un terzo con raggio minore, pari a 1,99 m, utile a raccordare la campata triangolare con l'impianto generale. La modellazione di queste superfici ha permesso di generare modelli ideali di crociere quadrangolari e triangolari, successivamente confrontati con la nuvola di punti. La comparazione ha mostrato una buona coerenza complessiva tra i modelli teorici e le geometrie effettivamente rilevate, con scostamenti generalmente contenuti entro un valore di ± 3 cm, compatibili con le tolleranze costruttive medievali e con eventuali deformazioni accumulate nei secoli [3]. Tuttavia, alcuni punti localizzati rivelano differenze di maggiore consistenza, soprattutto nelle zone di raccordo tra campate triangolari e quadrangolari (figg. 4, 5).

Tali discrepanze possono essere interpretate come il risultato di una certa flessibilità esecutiva, che privilegiava l'adeguamento progressivo in corso d'opera.

Dal punto di vista costruttivo, le crociere del piano terra pongono interrogativi interessanti. L'assenza di archi

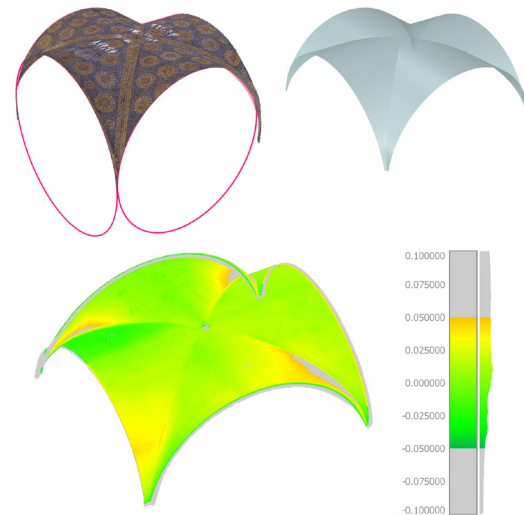


Fig. 4. In alto: modellazione della volta a crociera su base quadrangolare; in basso: distanza cloud-to-mesh nel range di ± 5 cm (elaborazione degli autori).

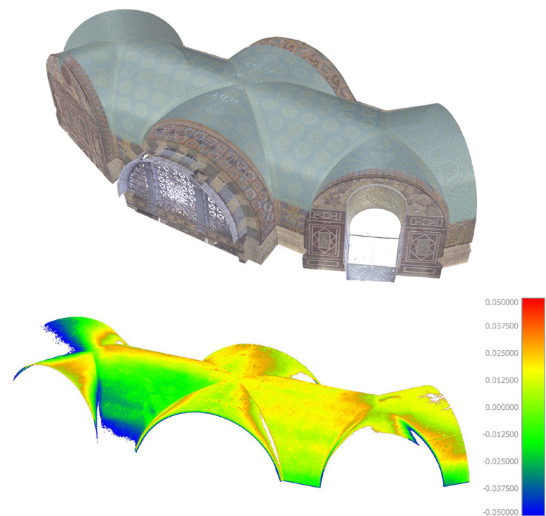


Fig. 5. In alto: modellazione della volta a crociera su base quadrangolare e triangolare; in basso: distanza cloud-to-mesh nel range di ± 5 cm (elaborazione degli autori).

disgiuntivi implica che le superfici voltate venissero impostate direttamente sulle murature, con centine probabilmente modulari riutilizzate per le diverse campate. L'omogeneità delle dimensioni dei cilindri ricostruiti suggerisce l'uso di pochi modelli di centine, adattati di volta in volta per le campate rettangolari o triangolari.

In termini di logica generativa, le crociere dell'ambulacro inferiore sembrano basarsi su un principio geometrico rigoroso – l'intersezione di cilindri – ma declinato a seconda delle condizioni planimetriche. Ciò rivela una padronanza costruttiva notevole, capace di trasformare schemi geometrici relativamente elementari in un sistema articolato e coerente, funzionale sia alla stabilità sia alla resa spaziale. Il confronto tra i modelli ideali e la realtà costruita, dunque, mette in luce una duplice dimensione: da un lato la volontà progettuale di adottare una regola unitaria basata sulla crociera, dall'altro la necessità di adattamenti puntuali in fase esecutiva. Questa dialettica tra progetto e costruzione costituisce un elemento chiave per comprendere l'organizzazione del cantiere carolingio e la capacità delle maestranze di tradurre principi geometrici in soluzioni concrete.

Genesi geometrica delle volte coniche

Dopo l'analisi del sistema voltato del piano terra, la ricerca ha preso in esame la genesi delle volte coniche collocate nell'ambulacro del primo piano [Attenni et al. 2023]. Questa tipologia, che potrebbe sembrare estranea alla tradizione costruttiva dell'VIII secolo [Bianchini 2024], si è rivelata da subito di notevole interesse, sollevando interrogativi significativi sul livello di conoscenza geometrica e tecnica raggiunto in quell'epoca.

Dal punto di vista compositivo, le volte coniche si dilatano verso le pareti verticali esterne della Cappella, disposte a formare un cilindro. Ne deriva che l'intersezione tra la superficie voltata e la parete cilindrica dà origine a un profilo descritto da una curva quartica sghemba. Oltre alla novità architettonica, questa tipologia di curve si presta con difficoltà a essere utilizzata direttamente per la descrizione della geometria del cono come superficie rigata; per questa ragione, è stato necessario individuare una curva piana da assumere come direttrice. A tale scopo, si è scelto di impiegare la curva risultante dall'intersezione tra la volta e un piano verticale passante per i punti in cui la curva quartica incontra il piano di imposta della volta stessa. Questo arco, che approssima molto bene una circonferenza, offre

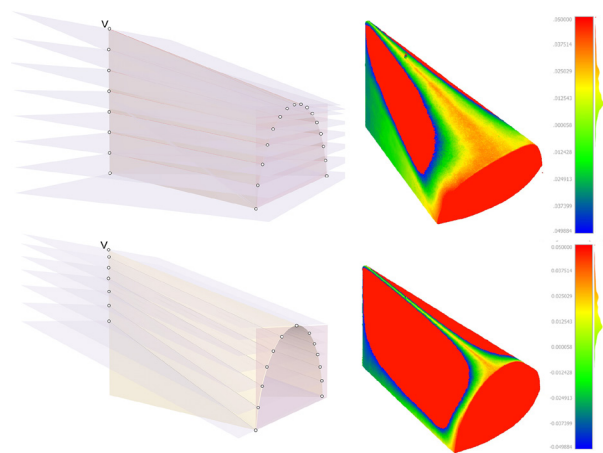


Fig. 6. In alto: conoide generico; in basso: conoide con piano direttore parallelo al piano di imposta. A destra: distanza cloud-to-mesh nel range di ± 5 cm (elaborazione degli autori).

una rappresentazione efficace della direttrice del cono. La soluzione risulta al tempo stesso coerente con una prassi costruttiva plausibile, fondata sull'impostazione di un arco a tutto sesto mediante una centina e sul successivo raccordo con la parete cilindrica.

Sebbene dalle prime indagini risultasse già fortemente plausibile l'impiego di un cono come matrice geometrica di riferimento per la forma delle volte, è stato ugualmente necessario prendere in considerazione altre due tipologie di superficie analogamente credibili nel contesto architettonico:

- una superficie conoidale con direttrice verticale circolare e piano direttore obliquo e parallelo piano di imposta [4];
- una superficie conoidale generica con direttrice verticale circolare (fig. 6).

Il confronto tra le tre superfici ha evidenziato sin da subito come quella conica costituisca il modello più coerente con i dati rilevati. Su questa base è stata avviata la modellazione digitale matematica della volta, interpretata come un cono: le due linee inclinate rispetto al piano di imposta sono state assunte come generatrici, la loro intersezione come vertice V, e la circonferenza verticale precedentemente discussa come direttrice.

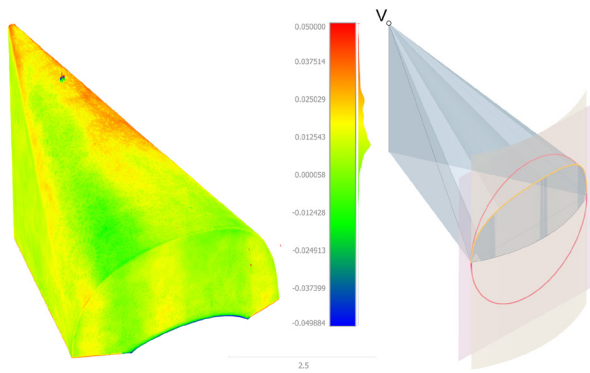


Fig. 7. A sinistra: distanza cloud-to-mesh (± 5 cm) tra la nuvola di punti e cono; a destra: intersezione con il piano verticale (in rosso) e la superficie cilindrica (in arancione) (elaborazione degli autori).

La superficie conica così definita interseca il cilindro che rappresenta la parete esterna lungo una curva quartica, in grado di approssimare con notevole precisione la nuvola di punti acquisita. Per verificare la validità del modello, la superficie è stata poi confrontata con il rilievo tridimensionale attraverso un'analisi *cloud-to-mesh*, che ha restituito una deviazione standard di circa 1 cm e una deviazione massima di 4 cm in corrispondenza delle imposte (fig. 7).

Dopo aver confermato la forte corrispondenza tra la superficie conica e la nuvola di punti acquisita, è stato possibile identificare gli elementi geometrici di descrizione del cono: il suo asse e la base a esso perpendicolare. L'asse è stato individuato impiegando un approccio basato sugli strumenti di analisi tipici della modellazione matematica [Salvatore 2012a]. In primo luogo, si passa per la costruzione di una sfera generica con il centro nel vertice del cono. L'intersezione tra questa sfera e la superficie conica genera una curva quartica (fig. 8a) che delimita un solido compreso tra quest'ultima e il vertice V (fig. 8b). La retta che congiunge il baricentro B di questo solido (fig. 8c) al vertice V , rappresenta proprio l'asse interno z del cono (fig. 8d).

Poiché l'asse z non è perpendicolare alla sezione circolare posta sul piano verticale, la base del cono è identificabile come un'ellisse. Questa curva può essere facilmente costruita intersecando il cono con un piano perpendicolare all'asse z . Conseguentemente, la descrizione geometrica dell'ellisse si completa determinando il suo asse ortogonale coniugato (fig. 8e).

A questo punto, è stato possibile ricostruire geometricamente la forma teorica della sezione circolare del cono così da poterla confrontare con l'arco impiegato come curva direttrice. In ogni cono a base ellittica è possibile sempre individuare due sezioni circolari. Queste sezioni sono state identificate seguendo il metodo proposto da Théodore Olivier [Olivier 1852, pp. 199-202], successivamente interpretato tramite modellazione matematica da Marta Salvatore [Salvatore 2012b, pp. 151-154]. La procedura consiste nel costruire una sfera tangente ai lati del triangolo definito dall'asse maggiore della base ellittica e dal vertice del cono. L'intersezione tra questa sfera e il cono produce proprio le due sezioni circolari (fig. 8f).

Infine, il confronto tra una delle due sezioni circolari così ricostruita e la curva direttrice derivata sezionando la nuvola di punti ha rivelato un'ottima sovrapposizione, con una rotazione angolare minima e uno scarto dimensionale trascurabile. Sulla base di questa analisi, possiamo concludere che le volte della Cappella Palatina sono effettivamente coniche e che la loro costruzione in cantiere deve essere stata

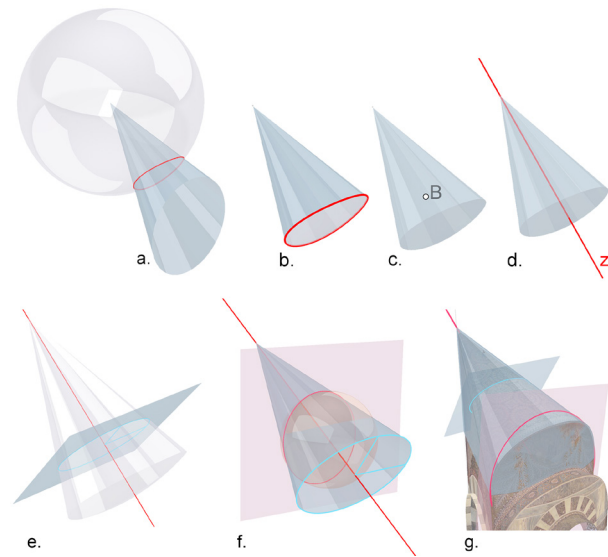


Fig. 8. Da a. a d.: costruzione dell'asse di un cono; e.: costruzione dell'ellisse; f.: costruzione dei due piani che tagliano il cono a base ellittica generando circonferenze; g.: ricostruzione finale (elaborazione degli autori).

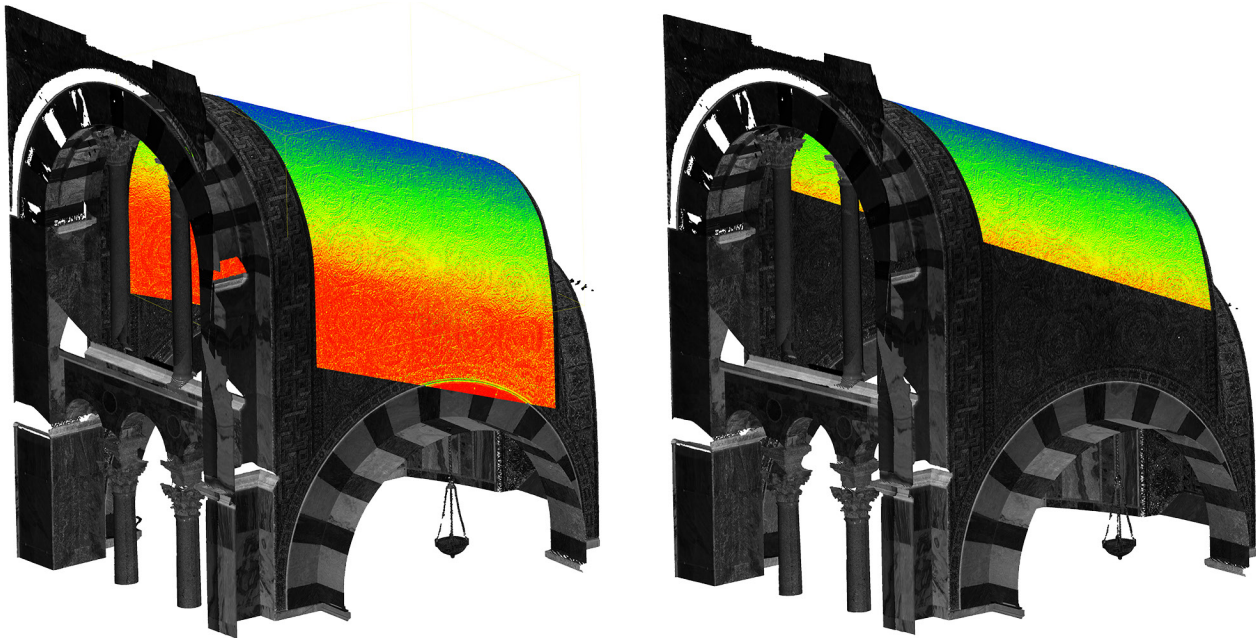


Fig. 9. A sinistra: visualizzazione dei valori di verticalità associati alla nuvola di punti; a destra: segmentazione della porzione cilindrica della volta escludendo i punti con valori di verticalità significativi (elaborazione degli autori).

guidata dalla materializzazione di tre elementi principali: il vertice, le generatrici collocate sul piano di imposta e la sezione circolare verticale (fig. 8g).

Genesi geometrica delle volte a botte inclinata

Lo stesso tipo di analisi è stato condotto anche sulle volte a botte inclinate, situate al primo livello della Cappella Palatina e convergenti verso la cupola ottagonale. Pur facendo riferimento a una matrice architettonica e costruttiva apparentemente più frequente, la ricostruzione digitale di questa tipologia ha consentito di mettere in luce delle caratteristiche geometriche peculiari e verificare la padronanza di una pratica architettonica fondata su una conoscenza approfondita della geometria delle coniche e delle loro proprietà.

La prima fase della sperimentazione ha avuto come obiettivo l'individuazione del piano di imposta. A tale scopo, l'analisi della verticalità dei punti [5] ha permesso di segmentare la nuvola dell'intera campata, isolando la superficie curva cilindrica dalle pareti verticali (fig. 9). Successivamente, è stata avviata la costruzione del cilindro che meglio approssimasse la superficie reale, così da poterne analizzare le proprietà. Per comprendere il tipo di superficie teorica da interpolare con la nuvola di punti, è stato necessario analizzare geometricamente la sezione verticale e la sezione retta della volta. A partire dall'individuazione del colmo, quindi, la nuvola di punti è stata intersecata con un piano verticale, prima, e con un piano perpendicolare al colmo, poi, per analizzare i due profili. Quest'analisi mette in evidenza un elemento di particolare interesse: la sezione perpendicolare al colmo è circolare mentre quella verticale risulta ellittica, con il

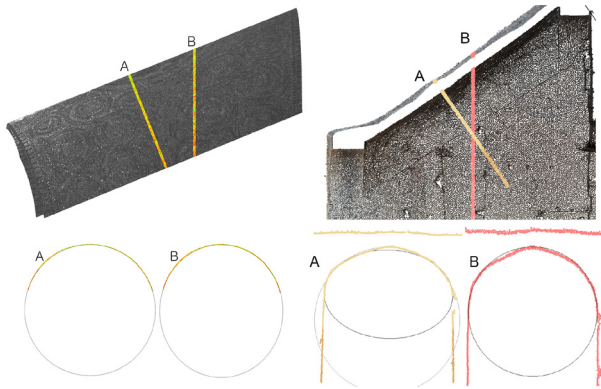


Fig. 10. In alto: volte inclinate della Cappella Palatina (a sinistra) e del Colosseo (a destra); in basso: sezioni perpendicolari all'asse (A) e verticali (B) con estrazione dei profili geometrici (elaborazione degli autori).

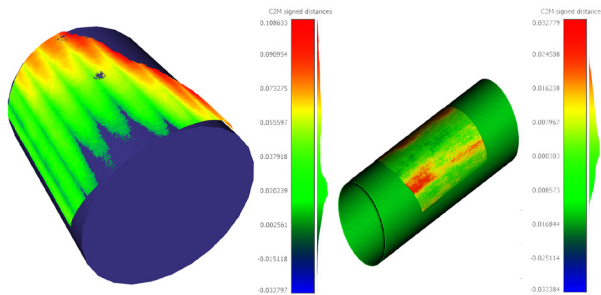


Fig. 11. Visualizzazione della distanza tra il cilindro teorico e la nuvola di punti. A sinistra: il cilindro calcolato mediante shape detection; a destra: quello calcolato mediante best fit (elaborazione degli autori).

semiasse minore pari al raggio del cilindro (2,61 m) e il semiasse maggiore, pari alla freccia verticale della volta, di 2,81 m. Tale configurazione, già segnalata da Raabe, Trautz e Di Pumpo [2019], si discosta da una tradizione costruttiva basata sulla costruzione della volta inclinata come traslazione di una semicirconferenza contenuta in un piano verticale lungo un asse inclinato e che descrive quindi un cilindro inclinato [Adam 2014, pp. 189-211]. A titolo meramente dimostrativo, lo stesso metodo di analisi è stato applicato su una delle volte inclinate dell'Anfiteatro Flavio [6] per verificare l'effettiva

peculiarità del sistema adottato ad Aachen. Questo approfondimento sul Colosseo ha mostrato chiaramente l'impiego di un cilindro obliquo come genesi geometrica (fig. 10).

Tale particolarità solleva inevitabilmente interrogativi sull'organizzazione del cantiere e sulla predisposizione delle centine necessarie alla sua realizzazione. Tralasciando per un momento gli aspetti costruttivi, la fase successiva ha riguardato la ricostruzione del solido con asse inclinato di $21,52^\circ$ rispetto all'orizzontale e base circolare, vale a dire un cilindro retto. La ricostruzione di una forma teorica di punti, come quella del cilindro, può essere effettuata sia in modalità semiautomatica, tramite algoritmi di *shape detection* e *best fit*, sia mediante modellazione manuale. In questo caso si è privilegiata la prima soluzione, in quanto la corrispondenza morfologica tra i punti segmentati e la forma teorica di riferimento incoraggiava l'adozione di un metodo capace di restituire la ricostruzione statisticamente più adeguata, evitando ulteriori passaggi di sottocampionamento e selezione. Ciononostante, l'algoritmo di *shape detection* per il cilindro [7] non ha prodotto risultati soddisfacenti. Esso ha infatti scomposto ulteriormente la nuvola di punti già segmentata in porzioni minori, calcolando per ciascuna un cilindro teorico distinto. Tale comportamento è imputabile alle deformazioni costruttive della volta, che si riflettono nella nuvola di punti e ostacolano l'individuazione di una superficie cilindrica unica. Aumentando la tolleranza nello scostamento tra la forma teorica ricostruita e i punti corrispondenti, l'algoritmo riesce a generare un unico solido, in grado di approssimare la superficie cilindrica della volta minimizzando gli errori locali. Tuttavia, il cilindro teorico così ottenuto presenta scostamenti consistenti rispetto alla nuvola di punti, incompatibili con le irregolarità costruttive riscontrate.

La seconda sperimentazione di ricostruzione automatizzata della forma ha previsto l'impiego di un algoritmo di *best-fit* [8] [Bianchini, Carnevale, Griffo 2024]. L'algoritmo utilizzato è di natura iterativa, avente come funzione-obiettivo l'individuazione dei parametri caratteristici della funzione generica del cilindro retto con assi non paralleli a quelli cartesiani (componenti del vettore direzione, la posizione dell'asse e il valore del raggio). Questa procedura, eseguita in ambiente *Matlab*, privilegia un'unica soluzione globale di ricostruzione della forma rispetto a più riconoscimenti locali dettagliati (fig. 11).

A partire dal cilindro teorico costruito mediante l'algoritmo di *best fit*, l'ultima fase della sperimentazione ha riguardato l'individuazione dei suoi elementi caratteristici, ossia della posizione dell'asse, del raggio della sezione retta e dell'ellisse di intersezione con il piano verticale (fig. 12).

Dopo aver descritto il cilindro retto quale modello geometrico più efficace per approssimare la volta a botte inclinata, è opportuno soffermarsi sulle implicazioni pratiche che tale scelta comporta, in particolare rispetto alla progettazione delle opere provvisionali. La volta, realizzata con conci di grovaccia e travertino eterogenei per forma e dimensione, presenta una apparecchiatura muraria listata, caratterizzata da ricorsi regolari di blocchi sottili e allungati alternati a elementi squadri di maggiore pezzatura (fig. 1 d). Una tessitura di questo tipo richiede l'impiego di una centina lignea, la

cui configurazione originaria non risulta però di immediata ricostruzione. Se si ipotizza una centina interamente verticale, con base coincidente con il diametro del cilindro, il profilo della curva guida assumere un andamento ellittico; al contrario, per adottare una centina ad arco semicircolare, questa avrebbe dovuto essere inclinata perpendicolarmente al piano di imposta. Queste due ipotesi suggeriscono una complicazione significativa della pratica costruttiva solita, motivata, probabilmente, solo da una volontà progettuale chiara nel voler costruire un cilindro retto. Raabe, Trautz e Di

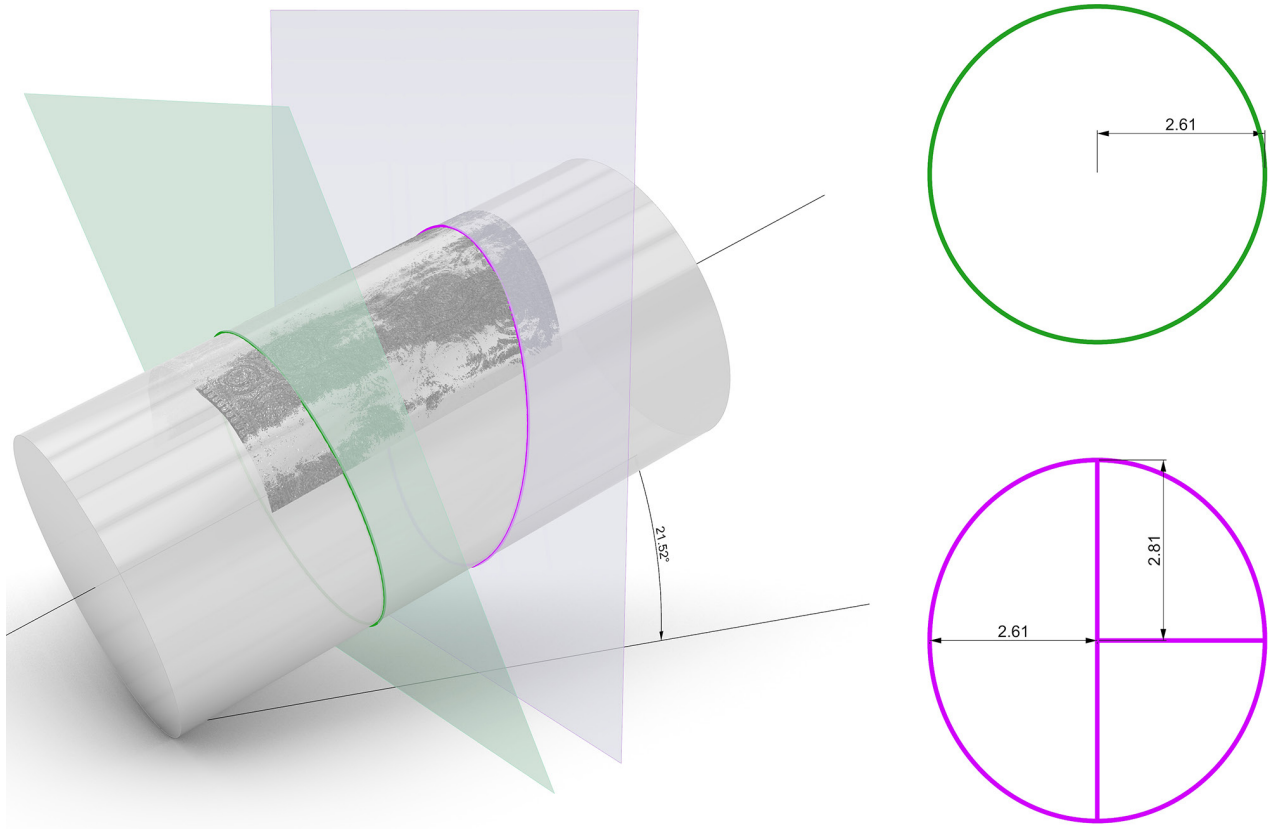


Fig. 12. A sinistra: costruzione del cilindro teorico (in grigio), del piano verticale (in viola) e del piano perpendicolare all'asse (in verde); a destra: rappresentazione delle due curve intersezione (elaborazione degli autori).

Pumpo [2019, pp. 26-29] propongono un modello costruttivo basato sull'impiego di una centina mobile, di dimensioni leggermente inferiori al diametro della volta, traslata orizzontalmente di circa 10 cm tra i due fianchi. Secondo gli autori, tale procedimento giustificerebbe la formazione di un arco ellittico disposto sul piano verticale. Questo principio operativo comporterebbe tuttavia la generazione di un arco ellittico ribassato, in contrasto con il profilo a sesto rialzato che si ricava dall'analisi del tracciato verticale della volta. In definitiva, mettendo a sistema i diversi dati sperimentali osservati, pare chiaro come emerga una profonda consapevolezza delle proprietà geometriche delle coniche unita alla loro traduzione in soluzioni pratiche per la costruzione.

Analisi dei risultati

Negli ultimi decenni, l'evoluzione delle metodologie di rilievo 3D ha segnato una tappa fondamentale nella storia della rappresentazione, aprendo scenari nuovi per la documentazione e l'interpretazione dell'architettura. Oggi stiamo assistendo a una fase ulteriore di questo percorso: l'attenzione non si concentra più soltanto sulle tecniche di acquisizione ed elaborazione dei dati, ma si sposta sempre più sul loro potenziale analitico. Le nuvole di punti, grazie all'elevato grado di accuratezza che possono raggiungere, non rappresentano semplicemente una fedele registrazione della realtà, ma diventano la materia prima per sperimentare strumenti capaci di interpretare in maniera coerente con la loro natura. In questa prospettiva, il caso della Cappella Palatina ha offerto l'occasione per indagare le diverse strategie disponibili, con l'intento di restituire ai dati raccolti tutto il loro valore informativo. Dall'applicazione di algoritmi di *shape detection* e di *best fit*, fino al ricorso alla modellazione matematica più tradizionale, il ventaglio di possibilità mostra come lo studio della storia dell'architettura non possa più prescindere da approcci avanzati di analisi. Questi strumenti non solo permettono di rispondere a interrogativi consolidati, ma aprono la strada a nuove domande e prospettive, rivelando aspetti inattesi che la costruzione architettonica custodisce al proprio interno.

Conclusioni

Nel quadro generale dell'*Aachen Cathedral Project*, il presente studio rappresenta un'ulteriore tappa nell'approfondimento

delle geometrie emergenti dalla lettura e interpretazione dei dati metrici rilevati sulla Cappella Palatina.

Le evidenze presentate, la cui affidabilità appare saldamente ancorata alla attendibilità dei dati di partenza e al rigore della metodologia di analisi applicata, mostrano una padronanza inaspettata della geometria delle coniche, che stride significativamente con lo stato del pensiero geometrico occidentale così come tramandato dai libri che raccontano la sua storia. Tale caratteristica, inoltre, ha conseguenze anche dal punto di vista architettonico, rafforzando l'ipotesi che la Cappella Palatina sia il prodotto di una progettazione unitaria, meticolosamente controllata in tutte le fasi. In questo quadro, la presenza di un unico talentuoso architetto, che le fonti identificano con Odone da Metz, appare un'ipotesi solida e ragionevole.

L'analisi compositiva dell'edificio mette inoltre in evidenza alcuni aspetti originali, come dimostra il rapporto dinamico instaurato tra la fascia degli ambulacri e il vuoto dell'ottagono centrale. Questa peculiarità, sia dal punto di vista costruttivo che da quello formale, ha permesso di supportare un collegamento con la tradizione costruttiva orientale [Rababe, Trautz, Di Pumpo 2019] e in particolare armena [Bianchini 2024]. Tale confronto, unito all'ipotesi storiografica che attribuisce la stessa origine a Odone da Metz, sembra delineare un quadro coerente: un architetto di eccezionale talento che concepisce la Cappella Palatina come progetto unitario, integrando elementi romani e bizantini senza rinunciare a richiamare la propria cultura di riferimento. In ciò Odone dimostra non solo una piena padronanza delle forme architettoniche, ma anche conoscenze geometriche straordinariamente avanzate rispetto a quanto abitualmente accettato dalla storiografia.

Il caso di Aachen rafforza infatti l'idea che, nel corso dei cosiddetti "secoli bui", sia stata la Geometria pratica medievale il luogo dove il pensiero geometrico occidentale poté conservarsi ed evolversi e non solo fornire basiliche costruzioni utili a settori chiave come edilizia, urbanistica o difesa [Bianchini 1995]. Le volte della Cappella Palatina offrono un primo indizio significativo di quanto detto, benché ancora poco considerato nel quadro storiografico che ha fin qui privilegiato le fonti scritte trascurando tuttavia il fatto che la trasmissione del sapere avveniva soprattutto per via orale e con l'apprendistato. Da qui l'ipotesi che esista una storia alternativa della geometria medievale, non fissata su pergamena ma incisa nella pietra, pronta a emergere oggi grazie agli strumenti di analisi, misura e simulazione che abbiamo a disposizione [9].

Note

[1] *Aachen Cathedral Project* è un progetto internazionale di ricerca che vede coinvolti Sapienza Università di Roma (Carlo Bianchini, Carlo Inglese, Guglielmo Villa, Martina Attenni, Marika Griffò, Roberto Barni), la Robert Gordon University di Aberdeen (Douglas Pritchard), la RWTH Aachen University (Yannick Ley) in *partnership* con la Dombauhütte della Cattedrale di Aachen (Jan Richarz). Obiettivo del progetto è la documentazione il più possibile completa degli edifici che compongono il complesso come pure dei loro materiali costitutivi mediante l'utilizzo integrato di tecnologie avanzate di rilevamento. Il progetto è co-finanziato nel quadro del PNRR, Partenariato Esteso 5 "CHANGES", Spoke 8, Linea Tematica 1 Produzione, organizzazione e comunicazione della conoscenza coordinata dal prof. Carlo Bianchini.

[2] *L'elevation map* del software Autodesk ReCap consente di attribuire un valore cromatico a ciascun punto della nuvola in funzione della sua quota rispetto a un asse di riferimento. Lo strumento non produce un'elaborazione metrica autonoma, ma una rappresentazione cromatica che facilita l'individuazione visiva di variazioni altimetriche o deformazioni locali.

[3] Non è stato possibile effettuare un'indagine diretta sulla pietra poiché tutte le strutture originarie al livello inferiore e superiore sono ricoperte dal mosaico di Hermann Schaper del XX secolo [Radel 2022]. Tuttavia, è plausibile ritenere che tali operazioni non abbiano comportato modifiche sostanziali nelle geometrie e nelle proporzioni originarie delle strutture al di sotto.

[4] La scelta di verificare la corrispondenza tra i dati di rilievo e le superfici di questi conoidi, oltre che di suggestioni puramente geometriche, tiene conto di un loro (molto) successivo probabile uso per fini "costruttivi". Ci riferiamo allo *shipwright's circular wedge* studiato da John Wallis

noto come cono-cuneo di Wallis [Wallis 1648] e al «cono che termina in una linea» di Guarino Guarini [Guarini 1671, tr. XXV, theor. I, prop. VIII; Guarini 1737, cap. IV, oss. 6]. Si tratta in entrambi i casi di un conoide a piano direttore in cui però, a differenza di quello esaminato nel presente articolo, la direttrice circolare risulta perpendicolare al piano orizzontale di imposta che identifica la giacitura del piano direttore.

[5] L'analisi è stata condotta impiegando lo strumento di calcolo delle caratteristiche geometriche integrato in *CloudCompare v2.13*.

[6] La nuvola di punti deriva dalle attività di rilievo 3D e modellazione HBIM coordinate dal Parco archeologico del Colosseo (RUP dott. ssa Federica Rinaldi) e realizzate da un raggruppamento temporaneo aggiudicatario costituito da Consorzio Futuro in Ricerca (CFR) di Ferrara – mandataria – (coordinamento scientifico: Marcello Balzani, Guido Galvani, Fabiana Raco), GEOGRA' Srl di Sermide, ETS Srl e JANUS Srl di Roma.

[7] Per la sperimentazione è stato impiegato il Plugin RANSAC Shape Detection, integrato in *CloudCompare V2.13*.

[8] L'algoritmo di *best fit* cilindrico in ambiente *Matlab* è stato sviluppato e testato nella ricerca di dottorato di Flavio Carnevale [Carnevale 2026].

[9] Nella condivisione delle argomentazioni sviluppate, Carlo Bianchini ha redatto i paragrafi *Introduzione* e *Conclusioni*, Martina Attenni ha redatto i paragrafi *La cappella Palatina*, *Obiettivi della ricerca* e *Genesi geometrica delle volte a crociera*, Marika Griffò ha redatto i paragrafi *Genesi geometrica delle volte coniche*, *Genesi geometrica delle volte a botte inclinata* e *Analisi dei risultati*.

Autori

Martina Attenni, Scuola di Architettura e Design, Università di Camerino, martina.attenni@unicam.it

Carlo Bianchini, Dipartimento di Storia, Disegno e Restauro dell'Architettura, Sapienza Università di Roma, carlo.bianchini@uniroma1.it

Marika Griffò, Dipartimento di Storia, Disegno e Restauro dell'Architettura, Sapienza Università di Roma, marika.griffo@uniroma1.it

Riferimenti bibliografici

Adam, J.-P. (2014). *L'arte di costruire presso i Romani. Materiali e tecniche*. Milano: Longanesi.

Attenni, M., Barni, R., Bianchini, C., Griffò, M., Inglese, C., Ley, Y., Pritchard, D., Villa, G. (2023). The Vaulting System of the Palatine Chapel: the Aachen Cathedral World Heritage Site Documentation Project. In *Int. Arch. Photogramm. Remote Sens. Spatial Inf. Sci.*, vol. XLVIII-M-2-2023, pp. 119-128. DOI: 10.5194/isprs-archives-XLVIII-M-2-2023-119-2023.

Bianchini, C. (1995). Tecniche medievali di rilevamento. In *Disegnare. Idee Immagini*, n. 18, pp. 21-28.

Bianchini, C. (2024). Sulle unghie coniche della Cappella Palatina di Aachen / The conical vaults in the Palatine Chapel in Aachen. In

Disegnare: Idee Immagini, n. 68, pp. 56-71. DOI: 10.61020/11239247-202468-06.

Bianchini, C., Carnevale, F., Griffò, M. (2024). Algoritmi di *best fit* applicati allo studio dell'architettura storica / Best fit algorithms applied to the study of historical architecture. In F. Bergamo, A. Calandriello, M. Ciammaichella, I. Friso, F. Gay, G. Liva, C. Monteleone (a cura di). *Misura / Dismisura. Ideare Conoscere Narrare*. Atti del 45° Convegno Internazionale dei Docenti della Rappresentazione. Padova-Venezia, 12-14 settembre 2024, pp. 879-898. Milano: FrancoAngeli. DOI: 10.3280/oa-1180-c515.

Buchkremer, J. (1955). *Dom zu Aachen. Beiträge zur Baugeschichte III. 100 Jahre Denkmalpflege am Aachener Dom*. Aachen: Wilhelm Metz.

Carnevale, F. (2026). *Dal rilievo alla forma. Metodologie di best fit 2D e 3D per l'interpretazione dell'architettura costruita*. Tesi di dottorato di ricerca in Heritage Science, tutor prof. C. Bianchini. Sapienza Università di Roma.

Guarini, G. (1671). *Euclides adauctus et methodicus mathematicaque universalis*. Torino (Augustae Taurinorum): Typis Bartholomaei Zapatae Bibliopolae S.R.C.

Guarini, G. (1737). *Architettura Civile*. Torino: Gianfrancesco Mairesse all'insegna di Santa Teresa di Gesù.

Olivier, T. (1852). *Cours de Géométrie Descriptive. Première partie, Du point, de la droite et du plan*. Paris: Carilian-Goeury et Vor Dalmont.

Pieper, J., Schindler, B. (2017). *Thron und Altar, Oktogon und Sechzehneck. Die Herrschaftsikonographie der karolingischen Pfalzkapelle zu Aachen*. Berlin: Geymüller Verlag für Architektur.

Raabe, C., Trautz, M., Di Pumpo, C. (2019). *Karolingische Tonnengewölbe im Aachener Dom. Baugeschichte, Konstruktion und Technik*. Aachen: RWTHpublications. DOI: 10.18154/RWTH-2019-01489.

Radel, W. (2022). *Der Aachener Dom: Erneuerung der Innenausstattung 1842 bis 1913*. Norderstedt: Tredition.

Salvatore, M. (2012a). Il cono, i suoi assi, le sue sezioni piane, da Apollonio alla rappresentazione matematica. In L. Carlevaris, L. De Carlo, R. Migliari (a cura di). *Attualità della geometria descrittiva*, pp. 315-324. Roma: Gangemi Editore.

Salvatore, M. (2012b). *La stereotomia scientifica in Amédée François Frézier: prodromi della geometria descrittiva nella scienza del taglio delle pietre*. Firenze: Firenze University Press. DOI: 10.36253/978-88-6655-279-6.

Ulrike, H., Beckmann, E.M. (2012). *Die karolingische Pfalzkapelle in Aachen. Material - Bautechnik - Restaurierung*. Worms: Wernersche Verlagsgesellschaft.

Wallis, J. (1648). *Cono-Cuneus: or, the Shipwright's Circular Wedge. That is, a Body resembling in part a Conus, in part a Cuneus, Geometrically considered*. London: John Playford for Richard Davis, University of Oxford.