Un modello grafico archetipo nelle *Coniche* di Apollonio

Riccardo Migliari

Introduzione

Nel mondo antico, e perciò ben prima della codifica del metodo della doppia proiezione ortogonale ad opera di Gaspard Monge [Monge 1799], era possibile rappresentare lo spazio a tre dimensioni con la stessa fedeltà che consentono oggi i metodi di natura proiettiva. Queste rappresentazioni, pur non essendo documentate per mezzo di grafici, lo sono grazie alle descrizioni che si ricavano dai testi, come quello delle *Coniche* di Apollonio Pergeo.
Lo scopo di questo breve saggio è dimostrare come queste accurate descrizioni di sezioni piane di figure solide, eseguite in modo da conservare la vera forma degli elementi, siano in grado di consentire la ricostruzione nello spazio dell'architettura di forme e relazioni geometriche e di operare verifiche per mezzo del calcolo grafico.

La *Proposizione XIII* del *Primo libro* delle *Coniche* fornisce un buon esempio di questo metodo antico, che si è trasmesso poi nei secoli lasciando tracce profonde ancora nelle pagine della moderna stereotomia. Le figure bidimensionali, collegate tra loro con un artificio diverso dal ricorso alle linee di richiamo, ma non meno efficace, erano intese come un modello tridimensionale e idealmente rimontate nello spazio e possiamo immaginarle come pagine di un libro animato. Quest'uso è suggerito, per esempio, dal termine "*subiacens*" utilizzato nelle ultime proposizioni del *Primo libro* per indicare la sezione piana sulla quale viene costruito il complesso edificio della geometria del cono e delle sue curve.
Bisogna infine constatare che se le edizioni del trattato di Apollonio, come quelle di altre opere che riguardano

Articolo a invito per inquadramento del tema del focus, non sottoposto a revisione anonima, pubblicato con responsabilità della direzione.

https://doi.org/10.26375/disegno.14.2024.16

disègno ISSN 2533-2899

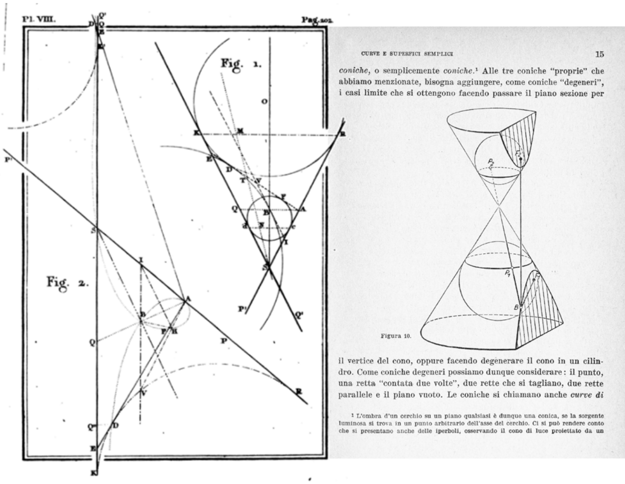


Fig. 1. A sinistra: la costruzione di Dandelin-Quetelet, per i casi della parabola e dell'ellisse, come appare, per la prima volta, nella memoria presentata da Germinal Pierre Dandelin alla Accademia del Belgio nel 1822.
A destra: la medesima costruzione per il caso dell'iperbole, illustrata da David Hilbert circa 100 anni più tardi.

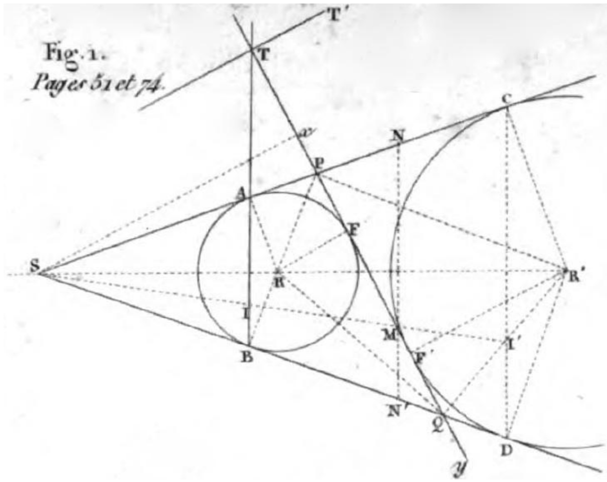


Fig. 2. Dettaglio della tavola supplementare (A) della seconda edizione del Traité de Géométrie descriptive di Jean-Nicholas Pierre Hachette [1828], dove il teorema di Dandelin viene per la prima volta proposto in un corso di Geometria descrittiva. La rappresentazione del cono sezionato e delle due sfere che si inscrivono al suo interno, per studiare il caso della ellisse, è assai simile a quella di Dandelin. Tuttavia Hachette indica anche, con il simbolo T, la proiezione della retta intersezione del piano di sezione con il piano che ospita il cerchio di contatto di una della sfere con il cono e identifica, in questa retta, una delle due direttrici della curva. Hachette ricorda che questa ulteriore proprietà della «architettura» di Dandelin gli è stata segnalata dal Signor Blanchet, professore aggregato dei Collegi reali di Parigi, nel 1826 [Hachette 1828, pp. 51, 52, 74].

forme generate nello spazio tridimensionale, avessero illustrazioni più fedeli, se ne avvantaggerebbero, e di molto, la lettura del testo e la sua comprensione. Queste illustrazioni non dovrebbero limitarsi a dare una vaga idea delle configurazioni immaginate dall'autore, ma potrebbero essere utilizzate come testimoni di un modo di pensare e di fare la geometria e come strumenti di verifica di relazioni e di pratica operativa.

Chi si occupa di geometria descrittiva è inevitabilmente indotto a studiare le sezioni coniche, non solo perché queste curve nascono ogni volta che un piano «incontra» [1] un cono o un cilindro, ma anche perché generano e sono generate da superfici quali la sfera, l'ellissoide, l'iperboloide, il paraboloide e il paraboloide iperbolico, tutte di estremo interesse per la teoria come per le applicazioni di questa scienza.

Germinal Pierre Dandelin e il suo amico Adolphe Quetelet hanno ideato una semplice costruzione che permette di dimostrare come la sezione di un cono circolare retto sia una parabola, un'iperbole o un'ellisse, ove si diano per note alcune proprietà di queste curve, oppure di dimostrare le proprietà medesime, riconoscendo nella sezione piana di un cono una parabola, un'iperbole o un'ellisse, secondo il caso [2]. E questo celebre teorema, almeno da quando David Hilbert lo ha utilizzato nella sua geometria intuitiva [Hilbert, Cohn-Vossen 1972, pp. 12-19], è uno strumento didattico essenziale (figg. 1, 2) [3].

Ma qual era la struttura che ha permesso ad Apollonio di Perga [4] di definire le coniche come sezioni di un cono obliquo, o quadrico, come si dice oggi, e non circolare retto come nel suddetto teorema?

Nel teorema di Dandelin-Quetelet [Dandelin 1822] l'immagine, sia disegnata che mentale, svolge un ruolo essenziale: rende manifesto il ragionamento astratto che dimostra il teorema. E se l'immagine può tanto, in quel teorema, è perché, grazie alla geometria descrittiva, quella costruzione solida può essere proiettata nelle pagine di un libro e può fornire, a chi voglia riprodurla, lo strumento di una verifica quasi sperimentale.

In altre parole, l'immagine è, di per sé, una prova esistenziale [5], anche se non ha la forza di una dimostrazione logica. L'immagine, inoltre, ha un valore euristico: aiuta a "trovare" la verità, la suggerisce, e perciò accenna a quale potesse essere il pensiero, tra intuizioni e deduzioni, del suo inventore.
Dunque, se quanto ho detto può valere per l'ottocentesco teorema di Dandelin-Quetelet, perché non dovrebbe valere per i teoremi di Apollonio? C'è solo una non piccola differenza tra i due modi di pensare la geometria ed è, appunto, nella capacità di rappresentarla. Perché nel primo Ottocento si aveva il controllo totale delle forme tridimensionali, grazie al contributo di Gaspard Monge e di chi lo ha preceduto nell'età moderna, mentre poco o nulla si sa della rappresentazione scientifica nell'era di Apollonio. Infatti dei modelli grafici di quel tempo remoto restano solo le incisioni sulla pietra dei cantieri antichi che sono frammenti di ortografie, come nel caso del timpano del Pantheon che si vede a Roma sul selciato del Mausoleo di Augusto, o nomogrammi, come quelli del tempio di Apollo a Didima [6].

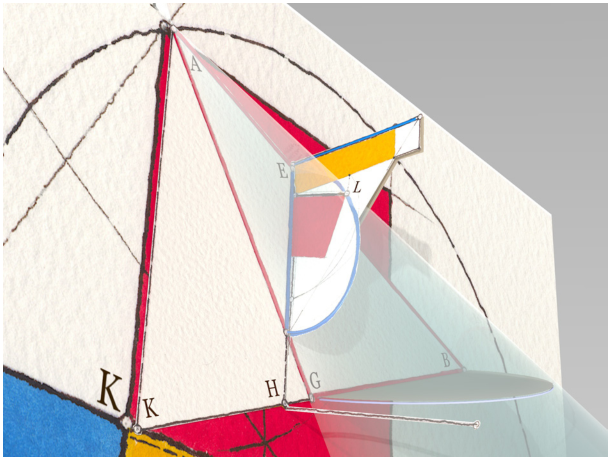


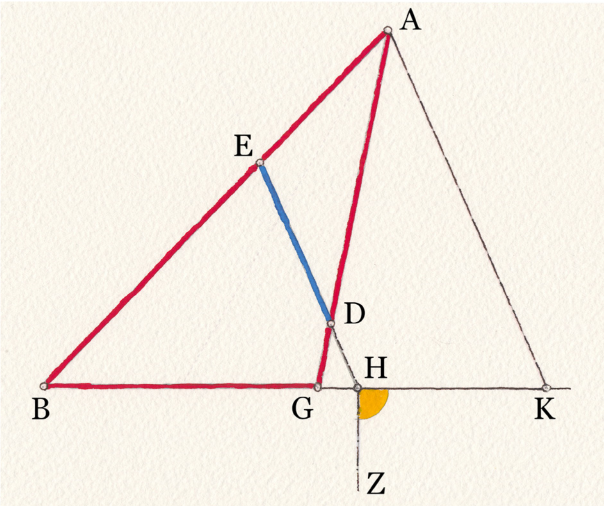
Fig. 3. Sintesi del modello archetipo descritto da Apollonio: sullo sfondo del nomogramma che permette di calcolare graficamente il latus rectum, si aprono, come nelle pagine di un libro animato, i piani del triangolo dell'asse e dell'ellisse sezione, capaci di evocare l'immagine mentale del cono qui rappresentato in trasparenza.

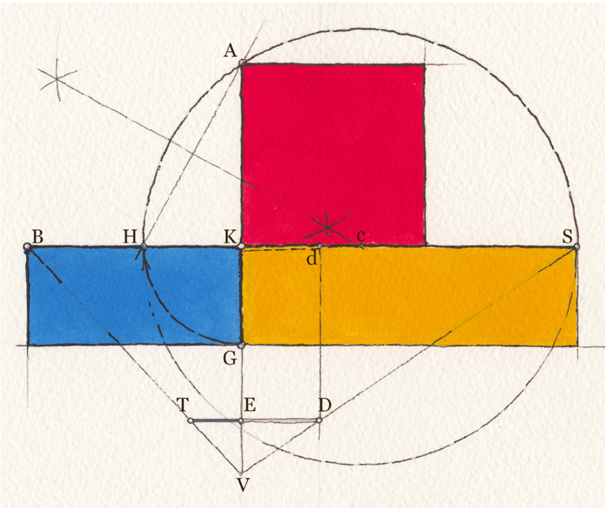
Il disegno dello spazio nel *Primo libro* delle *Coniche*

Il trattato sulle coniche non consiste soltanto in un insieme di deduzioni logiche capaci di descrivere testualmente le proprietà delle sezioni piane del cono, ma descrive altresì accuratamente strutture geometriche assai elaborate, che sono funzionali alle suddette deduzioni [7]. Per definire l'ellisse, la parabola e l'iperbole nelle *Proposizioni XI*, *XII* e *XIII* del *Primo libro*, Apollonio associa al cono obliquo a due falde, che considera a tal fine, quattro piani: uno come base del cono, un secondo che lo seziona passando per il vertice, un terzo che taglia il cono e sostiene la sezione conica considerata e un quarto parallelo alla base. All'interno di questi piani stanno circonferenze e segmenti di retta tutti legati tra loro da rapporti che si deducono l'uno dall'altro attraverso passaggi logici che richiamano vari teoremi di Euclide. L'insieme di queste figure e le loro relazioni geometriche costituiscono un modello del cono e della sua sezione (fig. 3) [8].
Paul Ver Eecke osserva che la lettura di queste proposizioni è «abbastanza ardua» [Apollonius Pergæi 1923, p. XIII] [9] e sono stati fatti molti tentativi di trasposizione del ragionamento in termini a noi più accessibili, vuoi per mezzo della notazione simbolica attuale, vuoi attraverso metafore [Flaumenhaft 2013, pp. XIII-XXX]. Ma una rappresentazione grafica fedele è la via più diretta per entrare nella logica e nel pensiero di Apollonio.
Seguendo alla lettera il testo originale, questo modello si compone di tre disegni:
- il primo è il «triangolo dell'asse» [10], descritto nei punti III e V delle *Definizioni* come sezione del cono con un piano che passa per il vertice e per il centro della sezione circolare che ne costituisce la base. Questo triangolo è rappresentato in vera forma ed è capace di evocare l'idea di un cono solido e finito, come nella *Definizione II* [Apollonius Pergæi 1891, p. 7] [11]. Il disegno è completato dalla intersezione del triangolo dell'asse con il piano di sezione che genera la conica (fig. 4);
- il secondo disegno è un nomogramma [Cassinis 1928] che Apollonio definisce con una relazione tra elementi che appartengono al triangolo dell'asse e due segmenti che appartengono al piano della sezione conica: il *latus transversum* [12], cioè il diametro

Fig. 4. Il primo dei disegni descritti nella Proposizione XIII: l'ortografia del cono. Si noti che il piano cui appartiene il triangolo dell'asse non coincide con il contorno apparente del cono rispetto alla direzione perpendicolare al piano stesso. Il che conferma il carattere non proiettivo di questa immagine.

Fig. 5. Il secondo disegno: un nomogramma che permette di calcolare la lunghezza del latus rectum a partire dai segmenti che si misurano sul triangolo dell'asse: AK, KB e KG.





(*Definizione IV*), e il *latus rectum* [Apollonius Pergæi 1891, p. 43], la cui lunghezza può essere calcolata graficamente, grazie appunto al nomogramma (fig. 5);
- infine il terzo disegno è la vera forma della conica, che si può tracciare grazie al diametro e al *latus rectum* dopo averne misurata la lunghezza (fig. 6).

In questo breve saggio non è possibile esaminare tutte le costruzioni grafiche tridimensionali descritte da Apollonio nel *Primo libro* delle *Coniche*; ci limiteremo, perciò, alla costruzione della conica nel caso in cui il piano di sezione incontra due lati del triangolo dell'asse e perciò tutte le generatrici del cono, che è il caso dell'ellisse, e che, a mio avviso, è anche il più semplice. Questo esame sarà condotto da un punto di vista particolare, quello dell'architetto che ammira un edificio attraverso la sua rappresentazione, come se si trattasse di un progetto.

Il disegno del cono e dell'ellisse come luogo geometrico

La *XIII Proposizione* esordisce con una descrizione discorsiva del cono e delle relazioni che lo legano alla sua sezione. Il testo tra caporali («…») è quello originale; ho aggiunto, tra parentesi quadre ([…]), le lettere che permettono di ricollegare il testo al disegno. Apollonio non lo fa, il che dimostra la natura letteraria di questa descrizione. Siamo nell'ambito di un'ecfrasi (figg. 4, 5) [13].
«Se un cono è tagliato da un piano [*ABG*] che passa per l'asse ed è anche tagliato da un altro piano [*EZH*] che incontra entrambi i lati [*AB* e *AG*] di questo triangolo dell'asse (fig. 4), ma non è né parallelo alla base del cono né parallelo alla [sezione] contraria [14]; e se il piano, nel quale si trova la base del cono, e il piano secante concorrono in una retta [*ZH*] perpendicolare alla base [*BG*] del triangolo dell'asse o al suo prolungamento [15], allora qualsiasi segmento [*LM*] che sia condotto dalla sezione conica al diametro della stessa [*ED*], in modo che sia parallelo alla intersezione [*ZH*] dei due piani [16], preso al quadrato, sarà equivalente a un certo rettangolo [*EMXO*], applicato a un segmento [*ET*] [17] rispetto al quale il diametro [*ED*] della sezione ha lo stesso rapporto che ha il quadrato del segmento [*AK*] condotto, parallelo al diametro, dal vertice del cono fino alla base del triangolo, rispetto al rettangolo compreso tra i segmenti [*KB*

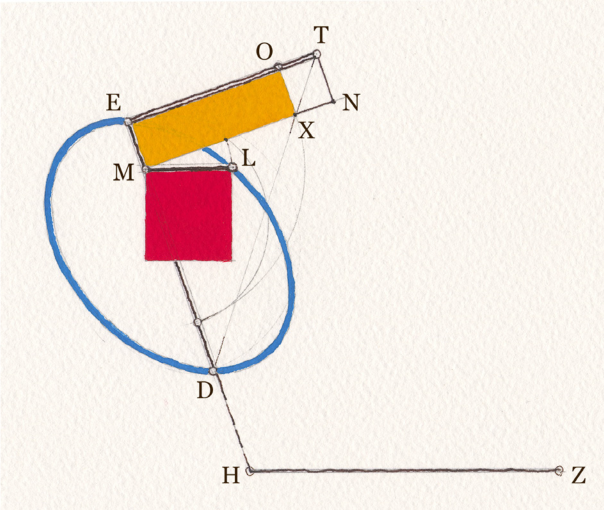


Fig. 6. Il terzo disegno descritto nell'enunciato della Proposizione XIII. La lunghezza del diametro ED si ricava dal primo disegno. La lunghezza del latus rectum ET si calcola graficamente per mezzo del nomogramma (fig. 5). Variando la posizione del punto M sul diametro ED in modo che il quadrato di LM e il rettangolo EX siano equivalenti, il punto L descrive l'ellisse. Il segmento EO sarà sempre minore del latus rectum ET che perciò assume il ruolo di un parametro. E il segmento OT è ciò che manca al parametro per raggiungere la lunghezza di ET. Mancanza è, appunto, in greco il nome dell'ellisse.

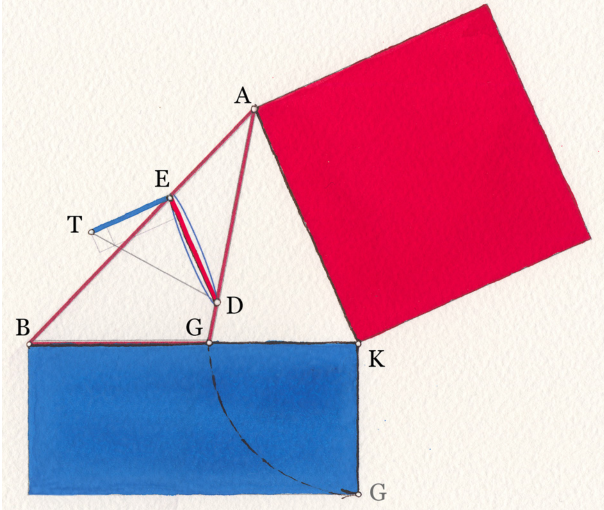


Fig. 7. In questo disegno il piano della sezione, che contiene il latus rectum ET, è stato sovrapposto al triangolo dell'asse lasciando immutata la posizione del latus transversum ED. Qui i colori evidenziano gli elementi corrispondenti nella relazione (2).

e *KG*] staccati sulla base del triangolo dal suddetto segmento» [Apollonius Pergaei 1891, pp. 48, 49, trad. dell'autore] (fig. 6).
Qui la lettura è particolarmente difficile proprio perché l'ecfrasi si presta bene a descrivere le forme, ma non è adatta a parlare di rapporti tra figure geometriche. In sintesi Apollonio, facendo riferimento ai due disegni precedenti, afferma che (fig. 6):

$$LM^2 = (EM \times MX) \qquad (1)$$

e che (fig. 5):

$$ED : ET = AK^2 : (KB \times KG) \qquad (2)$$

espressione che stabilisce la lunghezza del *latus rectum ET* in relazione al triangolo dell'asse *ABG* (fig. 7). Si tratta ora di legare tra loro le due relazioni precedenti, perciò l'enunciato prosegue definendo il rettangolo (*EMXO*) in relazione al *latus rectum ET* (fig. 6): «[E questo rettangolo applicato al *latus rectum ET*] avrà, come larghezza, il segmento [*EM*] staccato sul diametro dal vertice [*E*] della sezione al punto [*M*], nel quale il diametro è tagliato dalla retta [*LM*] condotta dalla sezione al diametro, mentre la sua area [*EMNT*] sarà diminuita di una figura [*OXNT*] simile e similmente posta al rettangolo compreso tra il diametro e il *latus rectum*. […] Tale sezione sia detta *ellisse*» (fig. 5).
Perciò, come vedremo (fig. 8), l'ellisse generata da quel piano di sezione può essere disegnata scegliendo a caso un punto *M* del diametro per costruire poi il luogo geometrico descritto dalla relazione (1).
A questo punto non resta che calcolare graficamente la lunghezza del *latus rectum* per mezzo della relazione (2), nella quale tutte le grandezze, fatta eccezione per l'incognita *ET*, possono essere misurate sul disegno del triangolo dell'asse (fig. 4) [18].
La relazione (2) viene data come veritiera, *a priori*. La sua validità è acclarata nell'ambito della successiva dimostrazione, che giustifica anche il rapporto (1).

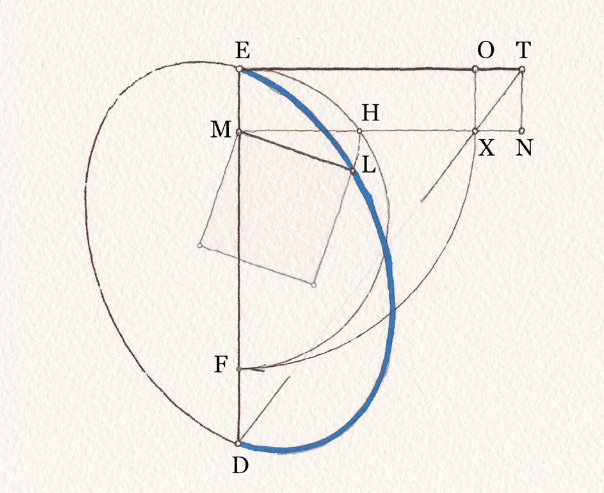


Fig. 8. La costruzione dell'ellisse dato il diametro (latus transversum) ED e il latus rectum ET.

Il nomogramma che misura il *latus rectum*

La dimostrazione si sviluppa in una dozzina di passaggi, per i quali rimando al testo originale [Apollonius Pergaei 1891, pp. 48-53] [19], poiché ciò che a noi interessa, in questa sede, è il modello tridimensionale nel suo insieme, evocato dai disegni presenti nelle figure 4 e 8 collegati dal nomogramma di figura 5, che lega l'ortografia del cono alla vera forma della sezione per mezzo del *latus rectum ET*.
La corrispondenza tra l'equazione (2) e il disegno di figura 5 è diretta: posto che il rettangolo giallo *GS* [20] e il quadrato rosso AK^2 sono equivalenti per costruzione (vedi nota 18), il rettangolo giallo sta al rettangolo azzurro come il diametro *ED* sta al *latus rectum ET*. Perciò:

1. sulla base del triangolo dell'asse (fig. 4), si misurano i segmenti *KB* e *KG* e si costruisce un rettangolo (in azzurro nella figura 5), nel quale i due lati sono di lunghezza eguale ai segmenti suddetti;
2. si riporta su *KB* un segmento *KH* di lunghezza eguale a *KG*;
3. si innalza su *K* un segmento *KA*, perpendicolare a *KB*, di lunghezza pari a *AK*;
4. si costruisce la circonferenza che ha centro sul prolungamento di *KB* e passa per *H* e *A*. Questa circonferenza taglia il prolungamento di *KB* in S e così il rettangolo che ha per lati *KG* e *KS* ha l'area eguale a quella del quadrato di *AK*. Infatti [Euclide 1970, VI, 13, p. 379] *AK* è medio proporzionale tra *HK*, che è uguale a *KG* per costruzione, e *KS*, sicché:

$$KG : AK = AK : KS$$

e cioè:

$$AK^2 = KG \times KS$$

Quindi, per costruire il *latus rectum ET* basterà trovare un segmento che soddisfi la proporzione:

$$ED : ET = KS : KB$$

Infatti, rettangoli che hanno l'altezza in comune stanno tra loro come le loro basi [Euclide 1970, VI, 1, pp. 361-363] e quindi la base *KS* del rettangolo giallo, che è equivalente al quadrato rosso (AK^2), sta alla base del rettangolo azzurro *KB*, come il diametro *ED* sta al *latus rectum ET*.
Basterà mettere *ED* in rapporto con *KS*, per esempio costruendo un qualsiasi triangolo (come *BSV* in figura 5) per tagliarlo poi con una retta parallela a *BS*, tale che i segmenti *ET*, *ED*, che risultano, abbiano i rapporti voluti.
Ottenuto come sopra il *latus rectum ET*, si può generare la curva sul piano di sezione in vera forma (fig. 8).

Il disegno dell'ellisse

1. Si costruisce il triangolo rettangolo *EDT* che ha per cateti il diametro *ED* e il *latus rectum ET*;
2. si sceglie sul diametro *ED* un qualsiasi punto *M* e si traccia per *M* la parallela *MN* a *ET*;
3. questa retta incontra l'ipotenusa di *EDT* nel punto *X*;
4. con il compasso, si riporta *MX* sul diametro in *MF*;
5. si costruisce la semicirconferenza che ha per diametro *EF*, che taglia la retta *MN* nel punto *H*;
6. si conduce per *M* la corda coniugata al diametro *ED* che è parallela alla intersezione *ZH* del piano di sezione con la base del cono;
7. con il compasso, si riporta *MH* sulla suddetta corda in *ML*.
8. *L* è un punto dell'ellisse, infatti:

$$MH^2 = EM \times MF$$

ma dato che $MH = ML$ e $MF = MX$

$$LM^2 = EM \times MX$$

Ovviamente variando la scelta di M si ottengono tutti i punti della curva (fig. 8).

Conclusioni sulle finalità di questo studio

Mi rendo conto che la lettura frammentaria del testo di Apollonio cui ho fatto riferimento, per di più privato di tutti o quasi i passaggi logici delle dimostrazioni, può apparire lesiva della grandezza dell'autore e perciò inaccettabile. Ma bisogna ricordare che questo studio non guarda alla matematica, ma all'architettura e al disegno.
Come hanno potuto gli antichi realizzare i grandiosi edifici che ci hanno lasciato, intesi come costruzioni di pietra, ma anche intesi come costruzioni di pensiero, senza il supporto della rappresentazione scientifica come oggi noi la conosciamo?
Accennare a una possibile risposta è lo scopo di questo studio per dimostrare che:
- quando Apollonio Pergeo tratta di figure solide il testo può essere letto come l'ecfrasi di un modello tridimensionale capace di rappresentare lo spazio non solo in modo allusivo ma con capacità operative; questa analisi può essere estesa a molti altri passi dello stesso e forse di altri autori;
- nel caso delle difficili proposizioni del *Primo libro* di Apollonio, questa ricostruzione può offrire al lettore una mappa per orientarsi, passando da un enunciato a una dimostrazione e poi all'esito finale come si passa da una pianta a una sezione quando si studia una rappresentazione di architettura, per poi ricollegarne i disegni nello spazio della mente e infine nella realtà.

È noto che i matematici hanno una innata difficoltà a riconoscere il ruolo dei modelli grafici nella elaborazione del pensiero geometrico, ma esistono anche altre autorevoli opinioni e tra tutte merita di essere citata per esteso quella di Lucio Russo: «Oggi consideriamo indipendenti tre attività che erano inscindibilmente connesse nella pratica matematica ellenistica: il ragionamento deduttivo, il calcolo e il disegno» [Russo 2023, p. 59] [21].
E a proposito di indipendenza di attività e, aggiungerei, di discipline, occorre anche rilevare come l'abitudine scolastica a denominare corsi come di "analisi", di "geometria", di "disegno" e così via, abbia indotto una separazione che non solo non esiste nella realtà, ma che è deleteria. Se guardiamo alla Storia della rappresentazione, oggi troviamo Storie della prospettiva, del disegno, della geometria e di molte altre discipline tutte separate tra loro, mentre sono interdipendenti. Credo che invece fosse più avanti di noi e sulla buona strada Christian Wiener [Wiener 1884, pp. 5-61] quando, nel 1884 delineò una breve storia che con continuità muove dalla prospettiva degli antichi all'ottica, alla topografia, alla geometria descrittiva e proiettiva, alla prospettiva pittorica e tridimensionale e alla fotogrammetria, fino alla teoria del chiaroscuro. Un percorso che, come sappiamo, non si è certo concluso con le tecniche informatiche.

Note

[1] Come diceva Girard Desargues [Desargues 1639].

[2] La genesi di questo celebre teorema è narrata da Adolphe Quetelet [Quetelet 1867, pp. 144-147] e mostra quanto possa essere tortuosa la strada che porta a un risultato di così limpida semplicità. Risultato che, pur essendo frutto della collaborazione con Quetelet, fu pubblicato da Germinal Pierre Dandelin nel 1822 e gli valse l'ammissione alla Accademia delle Scienze del Belgio.

[3] L'edizione italiana della *Anschauliche Geometrie* (1932) è stata pubblicata nella Universale scientifica Boringhieri nel 1972. Lo stesso Quetelet, rilevando l'importanza di questo teorema, osserva che il primo a farne uso fu Jean-Nicholas Pierre Hachette, nel 1828 [Quetelet 1867, p. 145] (fig. 2), precisamente nella seconda edizione del suo trattato di Geometria descrittiva [Hachette 1828, pp. 51-53], essendo la prima edita nel 1822, e che Théodore Olivier, nel 1847, gli ha dedicato uno studio speciale, che è compreso nei complementi del suo trattato [Olivier 1847, pp. V-VIII].

[4] Vissuto dal 262 al 190 a.C. [Boyer 1980, p. 166], di lui scrive Gino Loria: «Della sua vita si conosce così poco che non fu sinora possibile decidere se sia da identificarsi o non con un astronomo contemporaneo di egual nome. Un commentatore posteriore ce lo dipinge vano e borioso, in contrapposto stridente con Euclide, modesto e sempre pronto a riconoscere i meriti altrui. Delle migliorie da lui suggerite agli *Elementi* del sommo alessandrino si conosce poco più che l'esistenza; di un suo lavoro sulle quantità irrazionali, a complemento del libro X di Euclide, non ci è noto che quanto ne riferisce uno scrittore arabo; così di un suo lavoro sul problema di costruire un cerchio che ne tocchi tre altri situati nel medesimo piano (questione ancora designata col nome di "problema di Apollonio") non si conosce che il piano generale» [Loria 1930, p. 17].

Il più importante tra i commentatori ricordati da Loria è Pappo di Alessandria [Pappo 1560].

[5] Utilizzo qui il medesimo aggettivo proposto da Gino Loria nel suo volumetto sui *Metodi matematici* [Loria 1919, pp. 77-83] per definire questa potenzialità della costruzione geometrica in generale.

[6] Su questo argomento esiste un'ampia bibliografia pluridisciplinare già citata nel saggio di José Antonio Ruiz de la Rosa [Ruiz de la Rosa 1987]. Sul tempio di Apollo a Didima vedi Lothar Haselberger [Haselberger 1985]. Il tracciato del timpano del Pantheon è stato anche studiato da Carlo Inglese [Inglese 2000, 2013].

[7] Il testo di Apollonio si presenta come un'ecfrasi non dissimile da quelle letterarie. Tra i più celebri esempi di ecfrasi c'è la descrizione che Plinio il Giovane fa della sua Villa Laurentina, scrivendo al suo amico Clusinio Gallo [Plinio 1973, pp. 314-329]. La ricostruzione della villa ha attratto l'interesse di molti progettisti e studiosi, da Vincenzo Scamozzi [Scamozzi 1615, pp. 265-268] a Karl Friedrich Schinkel (1833-1835) [*1781-1841. Schinkel*… 1982, pp. 158-161] fino al concorso bandito nel 1982 dall'Institut Français d'Architecture [Porphyrios 1983, pp. 2-7]. Un ulteriore esempio, anche più pertinente, è la *Descriptio Urbis Romae* di Leon Battista Alberti [Alberti 2005], dove il disegno è sostituito da un codice alfanumerico, proprio come nei testi di geometria. Le *Coniche* contavano, in origine, otto libri, scritti in greco. I primi quattro sono giunti sino a noi nella lingua originale. I tre successivi, dal V al VII, ci sono pervenuti in una traduzione araba. L'ottavo libro è andato perduto. I sette libri superstiti sono stati tutti tradotti in latino e quasi tutte queste edizioni sono illustrate. Ricordiamo le principali edizioni, con particolare riferimento ai primi quattro libri. Si vedano Memmo 1537 [Apollonius Pergæi 1537]; Commandino 1566 [Apollonius Pergæi 1566]; Barrow 1675 [Apollonius Pergæi 1675]; Halley 1710 [Apollonius Pergæi 1710]. Inoltre, tra le edizioni più recenti: l'edizione critica di Heiberg [Apollonius Pergæi 1891; 1893]; quella leggermente abbreviata di Thomas Little Heath [Apollonius of Perga 1896]; quella, eccellente, di Paul Ver Eecke [Apollonius Pergæi 1923]; e, infine, quella di Robert Catesby Taliaferro e Micheal N. Fried [Apollonius of Perga 2013].

[8] Per illustrare questo scritto ho elaborato le figure al computer, come faccio ormai da anni. Ma nonostante molti tentativi di lenire la freddezza di questi disegni, non riuscivo a creare immagini capaci, in qualche modo, di evocare il rapporto tra logica e disegno del quale parla diffusamente Lucio Russo nel suo studio sul pensiero scientifico greco [Russo 2023]. Alla fine ho preferito usare riga e compasso e dovendo anche distinguere alcune aree con i colori, ho imitato la grafica di Oliver Byrne [Euclide 1847] al quale è doveroso rendere omaggio per avere tradotto in vivide immagini un pensiero luminoso che di norma è mortificato da scheletrici tracciati a filo di ferro.

[9] «*Les propositions XI, XII et XIII, dont la lecture est assez ardue, sont les plus importantes du premier livre*»: Paul Ver Eecke in Apollonius Pergæi 1923, p. XIII] («Le proposizioni XI, XII et XIII, la cui lettura è piuttosto difficile, sono i più importanti del primo libro», trad. dell'autore). Ma già nella edizione curata dal Padre Gesuita Claude Richard nel 1655 si legge, in uno dei capitoli introduttivi, dal titolo *Monito al Lettore studioso di Geometria*: «Sezione XIX - Se e perché le *Coniche* di Apollonio siano difficili. Se Pappo Alessandrino, che eccelleva nelle cose di geometria giudicò che, per comprendere le Coniche, fossero necessari tutti i suoi lemmi, oltre ai novanta dello stesso Apollonio, non saranno forse difficili?» [Apollonius Pergaei 1655, *Sectio XIX. An et cur difficilia sint Apollonij Conica*, senza numerazione delle pagine, trad. dal latino dell'autore].

[10] Secondo la *Definizione I* di Apollonio, l'asse è la retta che passa per il vertice e per il centro della base circolare del cono. Occorre prestare attenzione a non confondere questo segmento con la retta che appartiene a due dei piani di simmetria del cono ed è perpendicolare al terzo, come nell'uso odierno. L'asse di Apollonio è in generale distinto dall'asse di simmetria: le due rette coincidono solo se il cono è retto. Il termine «triangolo dell'asse» deriva dall'originale greco «*ἄξονος τριγώνον*», che altri traducono come «triangolo per l'asse» dall'edizione in latino di Johan Ludvig Heiberg «*triangulum per axem*». Nel testo originale, in greco, le definizioni non sono numerate, Heiberg le ha distinte in latino con i numeri da 1 a 8. Qui, per chiarezza, ho usato i numeri romani.

[11] Si noti che, come ribadito nella didascalia relativa alla figura 4, il triangolo dell'asse non coincide, in generale, con il contorno apparente del cono stesso rispetto alla direzione normale; questa condizione si verifica solo se il triangolo dell'asse appartiene a un piano perpendicolare alla base. Di qui la natura non proiettiva di questa immagine.

[12] Nel caso della parabola, il cui diametro ha lunghezza infinita, il *latus transversum* è sostituito dalla distanza tra il vertice della curva (definito nella *Proposizione IV*) e il vertice del cono.

[13] È sorprendente constatare che non esiste una traduzione in italiano delle *Coniche* di Apollonio Pergeo, lacuna che non è tanto dolorosa per la lingua, quanto per la mancanza di un idoneo apparato iconografico. Infatti le edizioni storiche, e non solo, sono tutte carenti da questo punto di vista. La traduzione dei passi riportati è dell'autore di questo scritto.

[14] Ogni cono quadrico, quale che sia la direttrice utilizzata per generarlo e cioè un cerchio, un'ellisse, una parabola o un'iperbole, possiede due schiere infinite di sezioni circolari. Apollonio ne è consapevole e costruisce una sezione contraria nella *Proposizione V.*

[15] La richiesta condizione di perpendicolarità tra le due rette intersezione della base del cono con i piani di sezione, quello del triangolo e quello dell'ellisse, potrebbe apparire come un vincolo che limita la generalità della costruzione, ma non è così, perché ciò che determina forma e grandezza dell'ellisse è solo il piano di sezione e dunque il triangolo per l'asse può essere scelto liberamente.

[16] Cioè il piano di sezione e la base del cono.

[17] Cioè il parametro o *latus rectum*.

[18] Eutocio, nel suo commento alla *Proposizione XI* del *Primo libro* [Apollonius Pergæi 1893, p. 217] spiega come si possa rappresentare graficamente l'equazione $BG^2 : (BA \times AG) = TZ : ZA$ che è analoga a quella che ci interessa. E questa sua premura ci conferma nella ipotesi che il disegno usato dai matematici dell'epoca avesse un significato operativo. Adattando lo scritto di Eutocio alle relazioni che riguardano l'ellisse e cioè alla *XIII Proposizione*, si ottiene il seguente ragionamento (fig. 5): «Sia $AK^2 : (KG \times KB) = ED : ET$ ed è manifesto, per vero, ciò che si è detto, fino a prova contraria. Sia [disegnato] il rettangolo ($KG \times KB$) [in azzurro nella figura]. Applichiamo al lato [*KG*] un rettangolo di area equivalente al quadrato di lato [*AK*] [in rosso] e sia [*KS*] la larghezza di tale rettangolo [in giallo]». Interrompiamo, per un momento, la lettura di Eutocio per spiegare in dettaglio il suo discorso. Nel gergo scientifico del tempo "applicare a" sta per "costruire su"; dunque: costruiamo su quel segmento un rettangolo che abbia per altezza *KG*, come il rettangolo ($KG \times KB$), e sia equivalente al quadrato di

lato AK, cioè abbia la stessa area. Questo rettangolo avrà, dunque, KG per altezza e per base un segmento KS, la cui lunghezza deve essere calcolata graficamente. I due rettangoli BKG e SKG così generati, hanno l'altezza in comune e perciò le loro basi stanno tra loro come le loro aree [Euclide 1970, VI, 1, p. 361]: $(KG \times KS) : (KG \times KB) = KS : KB$. Ricordando, ora, che AK^2 è equivalente a $(KG \times KS)$ per costruzione, potremo scrivere che: $AK^2 : (KG \times KB) = KS : KB$, e poiché $AK^2 : (KG \times KB) = ED : ET$ segue che $KS : KB = ED : ET$. Questa relazione indica semplicemente che il segmento ET cioè il *latus rectum*, sta al diametro ED come KB sta a KS. Perciò, Eutocio conclude così: «E sia $KS : KB = ED : ET$ e così abbiamo ottenuto ciò che volevamo e infatti, essendo $KS : KB = ED : ET$, sarà, per contro, [Euclide 1970, V, 7 coroll., p. 318] $SG : GB = ED : ET$, ed è, anche, [Euclide 1970, VI, 1, p. 361] $KS : KB = SG : GB = AK^2 : (BK \times KG)$ [come si voleva dimostrare]».

[19] La traduzione in italiano delle prime tredici proposizioni, commentate e illustrate come in questo saggio, è disponibile all'indirizzo <https://www.migliari.it> (consultato il 15 maggio 2024).

[20] Quando Apollonio deve indicare un rettangolo non si serve di quattro lettere, ma soltanto delle due che associa ai vertici di una diagonale.

[21] Le pagine che Russo dedica al disegno meritano tutte una attenta lettura perché chiariscono quale importanza questo ha avuto nella formazione del pensiero geometrico ellenistico e come abbia assunto il valore di una «dimostrazione esistenziale» [Loria 1919, pp. 77-83].

Autore

Riccardo Migliari, Dipartimento di Storia, disegno e restauro dell'architettura, Sapienza Università di Roma, riccardo.migliari@uniroma1.it

Riferimenti bibliografici

1781-1841 Schinkel l'architetto del principe. (1982). Venezia: Albrizzi. Catalogo della mostra (Venezia, 13 marzo - 9 maggio 1982; Roma, 20 maggio - 30 giugno 1982). Venezia: Albrizzi.

Alberti, L.B. (2005). *Descriptio Urbis Romae.* J.-Y. Boriaud. F. Furlan (a cura di). Biblioteca dell'«Archivium romanicum». Firenze: Leo S. Olschki.

Apollonius of Perga. (1896). *Treatise on Conic Sections, edited in modern notation, with introductions including an essay on the earlier history of the subject by T. L. Heath*. Cambridge: Cambridge at the University Press.

Apollonius of Perga. (2013). *Conics: Books I-IV: the Entire Surviving Greek Text in the Only English Translation*. R. Catesby Taliaferro, M.N. Fried (Eds.). Santa Fe, New Mexico: Green Lion.

Apollonius Pergæi. (1537). *Apollonii Pergæi Philosophi, Mathematicique Excellentissimi Opera, Per Doctissimum Philosophum Ioannem Baptistam Memum Patritium Venetum, Mathematicarumque Artium in Urbe Veneta Lectorem Publicum. De Græco in Latinum Traducta*. G. Memmo (a cura di). Venetia: Bindoni.

Apollonius Pergæi. (1566). *Apollonii Pergæi Conicorum Libri IV. Una cum Pappi Alexandrini Lemmatibus et Commentariis Eutocii Ascalonitæ. Sereni Antinsensis Philosophi Libri Duo nunc primum in lucem editi. Quae Omnia Nuper Federicus Commandinus Urbinas mendis quam plurimis expurgata è Græco convertit, et commentariis illustravit*. F. Commandino (a cura di). Bononiæ: ex Officina Alexandri Benatii.

Apollonius Pergæi. (1655). *Apollonii Pergæi Conicorum Libri IV. Cum Commentariis R. P. Claudii Richardi, E Societate Iesu Sacerdotis, Patria Ornacensis in libero Comitatu Burgundiæ, et in Collegio Imperiali eiusdem Societatis Regji Mathematicarum Matriti Professoris, Dicatis*. C. Richard. (a cura di). S.l.: apud Hieronymum et Ioannem Bapt. Verdussen.

Apollonius Pergæi. (1675). *Archimedis Opera, Apollonii Pergæi Conicorum Libri IIII. Theodosii Sphærica: Methodo Nova Illustrata, et Succinctè Demonstrata. Per Is. Barrow, Exprofessorem Lucasianum Cantab. et Societatis Regiæ Soc.* I. Barrow (Ed.). Londini: Godbid & Scott.

Apollonius Pergæi. (1710). *Apollonii Pergæi Conicorum Libri IV. Priores cum Pappi Alexandrini Lemmatis et Eutocii Ascalonitæ Commentariis. Ex Codd. MSS. Græcis editit Edmundus Halleius apud Oxonienses Geometriæ Professor Savilianus*. E. Halley (Ed.). Oxoniæ: e Theatro Scheldoniano.

Apollonius Pergæi (1891). *Apolloni Pergeaei quae graece exstant cum commentariis antiquis. Edidit et latine interpretatus est J. L. Heiberg.* J.L. Heiberg (Ed.). Vol. I. Lipsiae: in Aedibus B.G. Teubneri.

Apollonius Pergæi (1893). *Apolloni Pergeaei quae graece exstant cum commentariis antiquis. Edidit et latine interpretatus est J. L. Heiberg.* J.L. Heiberg (Ed.). Vol. II. Lipsiae: in Aedibus B.G. Teubneri.

Apollonius Pergæi. (1923). *Les Coniques d'Apollonius de Perge Oeuvres traduites pour la première fois du grec en français avec une introduction et des notes par Paul Ver Eecke.* P. Ver Eecke (Ed.). Bruges: Desclée, De Brouwer et C.ie.

Boyer, C.B. (1980). *Storia della matematica*. Milano: Arnoldo Mondadori.

Cassinis, G. (1928). *Calcoli numerici grafici e meccanici.* Pisa: Tipografia Editrice Mariotti-Pacini.

Dandelin, G.P. (1822). Mémoire sur une nouvelle théorie des sections coniques considérées dans le solide. In *Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale de Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles*. Tome II. Bruxelles: P.J. de Mat, Imprimeur de l'Académie Royale et de l'Université de Louvain.

Desargues, G. (1639). *Brouillon project d'une atteinte aux evenemens des rencontres du Cone avec un Plan, par L,S,G,D,L*. Paris.

Euclide. (1847). *The First Six Books of The Elements of Euclid In Which Coloured Diagrams and Symbols are Used Instead of Letters for the Greater Ease of Learners*. O. Byrne (Ed.). London: William Pickering.

Euclide. (1970). *Gli elementi di Euclide*. A. Frajese, L. Maccioni (a cura di). Torino: UTET.

Flaumenhaft, H. (2013). Approaching the Study of Apollonius. In *Apollonius of Perga, Conics: Books I-IV*. Con comm. di H. Flaumenhaft e W. H. Donahue. Santa Fe, New Mexico: Green Lion Press.

Hachette, J.N.P. (1828). *Traité de Géométrie descriptive, comprenant les applications de cette géométrie aux ombres, a la perspective et a la stéréotomie*. Paris: Corby, Libraire Éditeur.

Haselberger, L. (1985). The Construction Plans for the Temple of Apollo at Didyma. In *Scientific American*, 253.6, pp. 126-133. <http://www. jstor.org/stable/24967878> (consultato il 23 aprile 2024).

Hilbert, D., Cohn-Vossen, S. (1972). *Geometria intuitiva - Complemento: I primi fondamenti della topologia di Pavel Sergeevič Aleksanrov*. Torino: Boringhieri.

Inglese, C. (2000). *Progetti sulla pietra*. Vol. 3. Strumenti del Dottorato di Ricerca in Rilievo e Rappresentazione dell'Architettura e dell'Ambiente. Roma: Gangemi Editore.

Inglese, C. (2013). Il tracciato di cantiere dell'Augusteo in Roma: integrazione di metodologie di rilievo. In *Disegnare. Idee immagini*, n. 46, pp. 64-73.

Loria, G. (1919). *Metodi della Geometria Descrittiva*. Milano: Hoepli.

Loria, G. (1930). *Pagine di Storia della Scienza*. Torino-Milano-Firenze-Roma-Napoli-Palermo: G.B. Paravia & C.

Monge, G. (1799). *Géométrie Descriptive. Leçons données aux écoles normales, l'An 3 de la République; par Gaspard Monge de l'Institut national*. Paris: Baudouin, Imprimeur du Corp législatif et de l'Institut.

Olivier, T. (1847). *Additions au Cours de géométrie descriptive. Démonstration nouvelle des propriétés principales des sections coniques / par M. Théodore Olivier...* Paris: Carilian-Goeury et V[ve]Dalmont Èditeurs.

Pappo di Alessandria (1560). *Pappi Alexandrini Mathematicae Collectiones a Federico Commandino urbinate in Latinum conversae, et Commentarjis illustratae*. Bononiæ: ex Typographia HH. de Duccjis.

Plinio Cecilio Secondo (1973). *Opere*. F. Trisoglio (a cura di). Vol. I. Classici latini. Torino: UTET.

Porphyrios, D. (1983). Pliny's Villa at Laurentum. In *Architectural Design*, n. 53, pp. 2-7.

Quetelet, A. (1867). *Sciences mathématiques et phisiques au commencement du XIX[e] siècle*. Bruxelles: Librairie européenne de C. Muquardt.

Ruiz de la Rosa, J.A. (1987). *Traza y Simetria de la Arquitectura - En la Antigüetad y Medievo*. Publicatione de la Universidad de Sevilla. Sevilla: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Sevilla.

Russo, L. (2023). *La rivoluzione dimenticata. Il pensiero scientifico greco e la scienza moderna*. Universale economica Feltrinelli / Saggi. Milano: Giangiacomo Feltrinelli Editore.

Scamozzi, V. (1615). *L'idea della Architettura Universale, di Vincenzo Scamozzi architetto veneto. Divisa in X. Libri*. Vol. I-V. Parte prima. Venetia: Giorgio Valentino.

Wiener, C. (1884). *Lehrbuch der Darstellende Geometrie*. Vol. 1. Leipzig: B.G. Teubner.