

Teorie e metodi per lo sviluppo delle rigate e lo spianamento approssimato delle rigate non sviluppabili

Mara Capone

Abstract

La genesi geometrica delle superfici e la conoscenza delle loro proprietà è da sempre la base per la risoluzione di molti problemi, sia costruttivi che di misurazione. La sviluppabilità di una superficie è una delle caratteristiche fondamentali di una forma che ne consente la fabbricazione a partire da una “striscia” piana, con un materiale flessibile e indeformabile. La geometria si occupa di studiare le proprietà che restano inalterate e, quindi, la forma che tale “striscia” deve avere affinché, a seguito di una serie di movimenti rigidi, essa possa assumere una determinata configurazione. Il contributo analizza i diversi metodi per determinare lo sviluppo delle superfici sviluppabili e la “planarizzazione”, o sviluppo approssimato, delle rigate non sviluppabili. Obiettivo primario è quello di individuare le relazioni tra i metodi illustrati in alcuni trattati e le possibili applicazioni derivanti dall'uso della modellazione parametrica. Ripercorrendo le tappe significative che, dalla prima definizione di superficie, presente nel De Anima di Aristotele (384-322 d.C.) e dalle ambigue definizioni di Amédée François Frézier (1682-1773), conducono agli studi di Leonhard Euler (1707-1783) e all'opera principale di Monge sulle superfici sviluppabili (1795), si intende offrire una panoramica sui diversi approcci, che hanno definito le basi del calcolo differenziale per lo studio delle proprietà delle rigate, e delle diverse metodologie che consentono di determinarne lo sviluppo.

Parole chiave: superfici sviluppabili, rigate, superfici a doppia curvatura, modellazione parametrica.

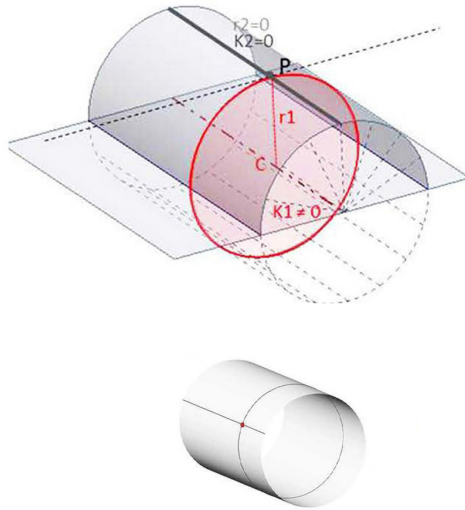
Introduzione

Sin dall'antichità, la genesi geometrica delle superfici e la conoscenza delle loro proprietà è stata la base per la risoluzione di molti problemi, sia costruttivi che di misurazione. La sviluppabilità di una superficie è una delle caratteristiche fondamentali di una forma, in quanto ne consente la fabbricazione a partire da una “striscia” piana di un materiale flessibile e indeformabile. La geometria si occupa di studiare le proprietà che restano inalterate e, quindi, la forma che tale “striscia” deve avere affinché, a seguito di una serie di movimenti isometrici, essa possa assumere una determinata configurazione.

Teorie

La classificazione differenziale delle superfici, introdotta da Leonhard Euler (1707-1783) e successivamente utilizzata da Monge, consente oggi di raggruppare le superfici in funzione della curvatura. In particolare, secondo la definizione introdotta Carl Friedrich Gauss nel 1802 [Gauss 1802, pp. 10-20], le superfici possono essere: a curvatura nulla, a curvatura positiva, a curvatura negativa o a curvatura variabile. Definita k la curvatura di una linea piana in un punto P , dove $k = 1/r$ ed r è il raggio del cerchio osculatore della linea, si definiscono sezioni principali di una superficie quelle ottenute con piani passanti per la normale alla superficie nel punto P , con curvatura minima e massima. Euler dimostra che queste sezioni appartengono a piani ortogonali.

Superfici sviluppabili
Curvatura nulla $k=0$



Superfici non sviluppabili
 $k < 0$ e $k > 0$

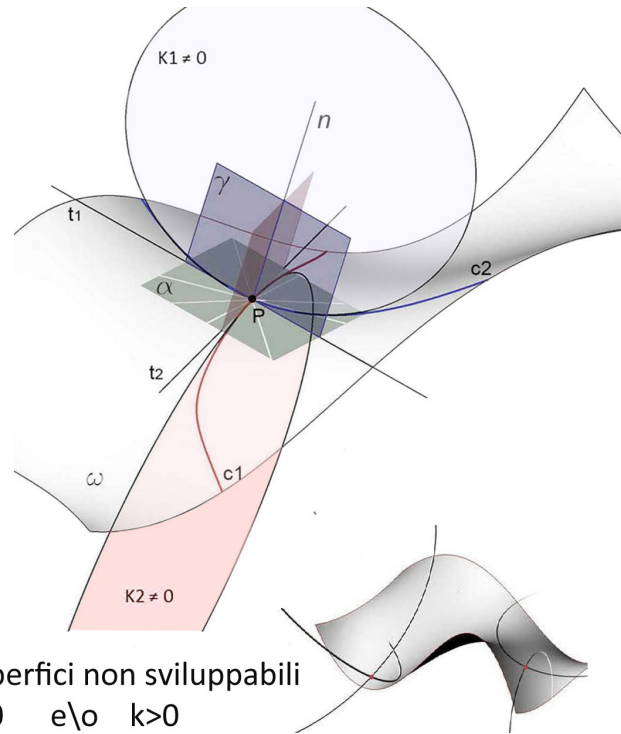


Fig. 1. Determinazione dei cerchi osculatori e della curvatura gaussiana di una superficie.

La curvatura gaussiana è il prodotto delle due curvatures principali, ne consegue che essa può essere positiva, negativa o nulla: è positiva quando i cerchi osculatori delle sezioni principali si trovano dalla stessa parte del piano tangente, negativa quando si trovano da parti opposte, nulla quando una delle due sezioni principali è una retta.

Le superfici con curvatura nulla sono delle particolari rigate, anche dette *sviluppabili* (fig. 1), quindi le superfici sviluppabili sono tutte rigate ma non tutte le rigate sono sviluppabili.

Per approfondire puntualmente il tema delle rigate fondamentale è il testo di Jean Pierre Nicholas Hachette, che classifica queste superfici in due categorie: le superfici sviluppabili, che ovviamente sono rigate, e le rigate, che per lo studioso francese sono le rigate non sviluppabili [Hachette 1828] [1].

I primi a studiare in modo sistematico le proprietà delle rigate sviluppabili in relazione ai principi della “geometria differenziale” sono Euler e Monge [Snežana 2011, pp. 701-714]. Entrambi propongono una generalizzazione della questione, pur non facendo mai esplicitamente riferimento ai concetti su cui tale classificazione si fonda, e non parlando mai né di cerchio osculatore né di piano osculatore [2].

Euler pone in modo esplicito il problema della sviluppabilità di una superficie. Nel *De solidis quorum superficem in planum explicare licet* egli definisce le condizioni geometriche di una superficie affinché sia sviluppabile: «notissima è la proprietà dei cilindri e dei coni, per cui si può sviluppare la loro superficie sul piano, proprietà che si può estendere a tutti i corpi cilindrici e conici, purché abbiano come base una figura; al contrario», afferma Euler, «la sfera manca di questa caratteristica per cui, in nessun modo, la sua super-

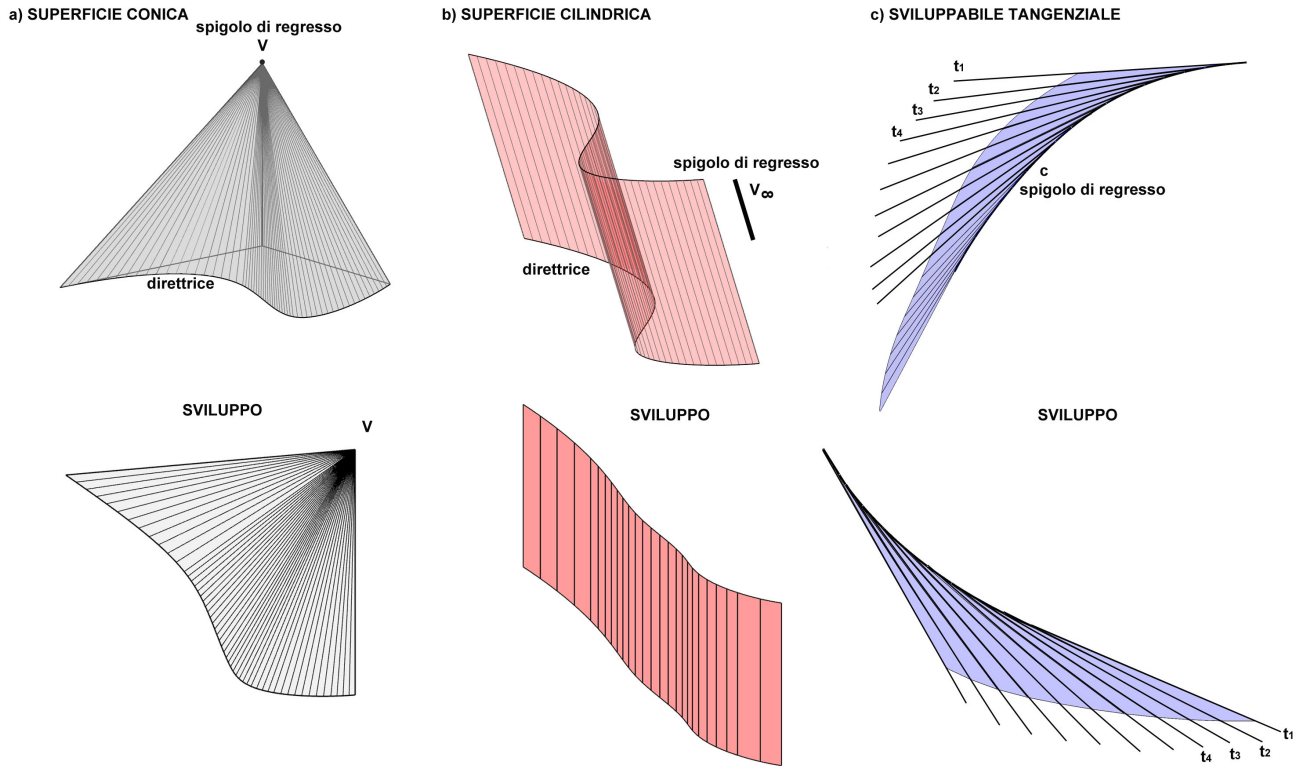


Fig. 2. Classificazioni delle superfici sviluppabili in funzione dello spigolo di regresso. Determinazione degli sviluppi.

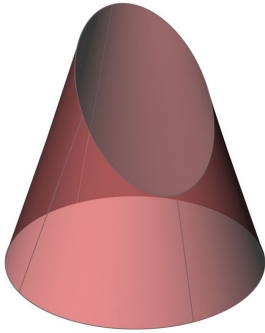
ficie si può rappresentare in piano...; da ciò nasce la domanda giustamente curiosa e degna di nota, esistono forse altri generi di corpi, oltre i coni e i cilindri, la cui superficie parimenti può essere rappresentata in piano, o no? Per la qual cosa in questa dissertazione ho posto questo problema: trovare un'equazione generale per ogni solido la cui superficie si può rappresentare in piano; alla cui soluzione in vari modi io mi sto per avvicinare» [Euler 1772, p. 3] [3]. Partendo dalla ricerca delle condizioni che rendono sviluppabile una superficie, il principale merito di Euler è stato quello di aver messo chiaramente in relazione i principi della geometria analitica e della geometria differenziale. Ma è Monge che introduce in modo esplicito una nuova famiglia di superfici sviluppabili, aprendo questioni che ancora oggi sono alla base dei diversi approcci per la costru-

zione di forme complesse [4]. Utilizzando il teorema che Monge illustra nelle sue lezioni di Geometria Descrittiva, per dimostrare il dominio di esistenza di una rigata generica [5] [Monge 1795, p. 130] egli definisce una particolare superficie generata da una retta che si muove lungo una curva sghemba restando tangente alla curva: tale superficie è una "svilupabile tangenziale".

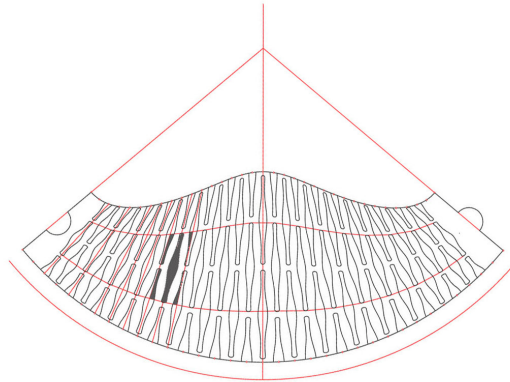
In base agli studi di Monge, Euler e Hachette si giunge ad una definizione generale delle superfici sviluppabili che sono, ovviamente, tutte rigate e possono essere raggruppate in tre famiglie: tangenziali, coniche e cilindriche. In una trattazione generale, la svilupabile tangenziale può essere considerata il caso generico in cui la direttrice ("spigolo di regresso") è una curva gobba qualsiasi (fig. 2c). La svilupabile si specializza quando lo spigolo di regresso si riduce

Fig. 3. Si possono facilmente costruire superfici coniche e cilindriche a partire dallo sviluppo utilizzando un materiale "flessibile" ma non "deformabile" (elaborazione grafica dell'autore).

1. Superficie conica - sviluppabile



2. Sviluppo



3. Costruzione



Fig. 4. Sviluppabili tangenziali. A sinistra: Antoine Pevsner, *Developable Surface*, 1938; a destra: Antoine Pevsner, *Developable Column*, 1942.



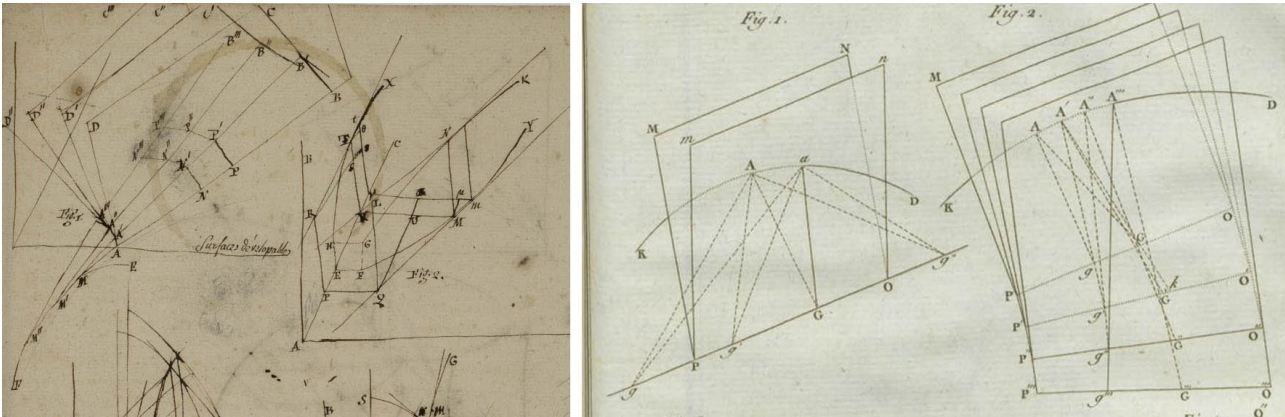


Fig. 5. A sinistra: Gaspard Monge, 1780 [Monge 1780]; a destra: Gaspard Monge, 1801 [Monge 1801].

ad un punto proprio o improprio: nel primo caso si ottiene una superficie conica (fig. 2a), nel secondo caso una superficie cilindrica (fig. 2b).

Definite le diverse tipologie di superfici sviluppabili è fondamentale definire il concetto di sviluppabilità. Geometricamente una superficie è sviluppabile se può essere distesa su un piano utilizzando una trasformazione isometrica, senza strappi o sovrapposizioni. Se ciò è immediatamente verificabile, anche empiricamente, per le superfici coniche e le superfici cilindriche (fig. 3), è sicuramente più complessa la verifica per una sviluppabile tangenziale (fig. 4), così come è più complessa la determinazione del suo sviluppo. La domanda posta da Euler su quali superfici possono essere distese sul piano e quali no richiede una risposta sempre più pertinente. Si definisce così la regola geometrica che consentirà di passare dalla teoria alla prassi relativa a cosa possiamo sviluppare e, soprattutto, come possiamo determinare lo sviluppo di una sviluppabile generica. Geometricamente una rigata è sviluppabile se due generatrici infinitamente vicine si intersecano e quindi sono complanari. Ciò è evidente per le superfici coniche in cui tutte le generatrici passano per un punto proprio, il vertice (fig. 2a), e per le superfici cilindriche in cui tutte le generatrici si intersecano in un punto improprio (fig. 2b). Nel caso della rigata tangenziale per dimostrarlo è necessario fare ricorso ai principi della geometria differenziale ed al concetto di limite e di derivata. La tangente ad una curva in un punto P , infatti, è la posizione limite che assume la retta

PQ al tendere di Q a P . Una volta definita la tangente in un punto P ad una curva piana, che si dimostra essere unica, si definisce il concetto di curvatura e la definizione di cerchio osculatore introdotta da Leibniz [Migliari 2009, p. 103]. Considerando, infatti, due punti A e B , prossimi a P , e la circonferenza passante per APB , si definisce cerchio osculatore quello che meglio approssima la curva al tendere di A e B a P .

Lo stesso ragionamento può essere esteso alle curve gobbe. Considerando la tangente t in un punto P della curva, la posizione limite della retta PQ , al tendere di Q a P , si definisce piano osculatore la posizione limite del piano passante per t e per un punto Q (al tendere di Q a P). Si può anche dimostrare che le tangenti di una curva sghemba sono le intersezioni delle coppie dei piani osculatori consecutivi e, per questa ragione, le superfici sviluppabili si possono anche definire come l'involuppo del movimento di un piano nello spazio [Fallavollita 2008, p. 111].

Dunque, da un punto di vista teorico, gli assunti posti alla base della sperimentazione possono essere così riepilogati:

- le superfici sviluppabili sono tutte rigate;
- hanno curvatura gaussiana nulla;
- possono essere generate dal moto di una retta tangente ad una curva sghemba;
- possono essere generate dall'involuppo del moto dei piani osculatori di una curva sghemba;
- in una superficie sviluppabile le due generatrici successive sono sempre incidenti.

Tutti gli studi fatti nel passato, qualunque sia stato l'approccio prevalente (quello geometrico sintetico, analitico o differenziale), si sono storicamente basati su intuizioni spaziali spesso poco o affatto rappresentate e quindi poco "visibili". Obiettivo di questo contributo è stato anche quello di utilizzare gli strumenti della modellazione tridimensionale quale metodo per dimostrare (oltre che per mostrare) e di utilizzare la modellazione algoritmica generativa per governare contemporaneamente le diverse anime della geometria: quella geometrica descrittiva, quella analitica e quella differenziale. A partire da questi assunti è stata messa a punto una sperimentazione basata sull'ibridazione dei vecchi principi e delle tradizionali metodologie con i nuovi strumenti di modellazione generativa, cercando di individuare approcci di ricerca innovativi in cui la conoscenza della geometrie risulta essere sempre il fondamento per la soluzione di problemi costruttivi complessi.

Metodi

La costruzione geometrica di una superficie conica o cilindrica non presenta particolari problematiche poiché assegnata una curva direttrice e il vertice (sia esso proprio o improprio) si tratta di costruire n generatrici che congiungono il vertice con gli n punti della direttrice. Anche la costruzione del modello 3D, utilizzando un qualsiasi software, è immediata: tale superficie si può, infatti, costruire semplicemente "estrudendo" la direttrice in una direzione o verso un punto proprio (fig. 2). Molto più complessa risulta, invece, la costruzione di una sviluppabile tangenziale. Analogo discorso vale per la determinazione degli sviluppi delle superfici coniche e cilindriche, che si ottengono agevolmente sia con metodi tradizionali che in ambiente digitale, mentre risulta molto più complessa sia la costruzione che la determinazione dello sviluppo di una tangenziale qualsiasi.

Costruzione di una sviluppabile tangenziale

Una sviluppabile tangenziale, in Geometria Descrittiva, è generata dal moto della retta tangente ad una curva gobba. Questa particolare famiglia di rigate può essere costruita utilizzando una sola curva direttrice (spigolo di regresso) poiché la tangente ad una curva sghemba in un punto è sempre univocamente determinata [Migliari 2009, p. 160]. Una sviluppabile generica si specializza se lo spigolo di regresso è un'elica cilindrica: la superficie generata dal moto di una retta tangente ad un'elica cilindrica è un elicoide sviluppabile.

La costruzione di una retta tangente ad una qualsiasi curva gobba è estremamente laboriosa con il metodo grafico tradizionale, ciò determina la quasi totale assenza di illustrazioni a supporto dei complessi ragionamenti spaziali nella maggior parte dei testi storici analizzati. L'apporto dello strumento informatico è notevole perché consente di costruire automaticamente una retta tangente in un punto di una curva sghemba. Per generare la superficie, quindi, è necessario costruire n tangenti che, per quanto automaticamente, dovranno essere determinate una alla volta per poter poi costruire la superficie utilizzando le n generatrici rappresentate. Ne deriva che: minore è il numero delle generatrici utilizzate e maggiore è la differenza tra la superficie generata e la sviluppabile tangenziale.

Utilizzando lo strumento di analisi della curvatura gaussiana k si può verificare se la superficie ottenuta è sviluppabile (verde, $k = 0$) oppure no (blu, $k < 0$) (fig. 6).

Il caso dell'elicoide sviluppabile è più semplice, infatti, se lo spigolo di regresso è un'elica cilindrica, per generare la superficie sarà sufficiente costruire la tangente in un punto qualsiasi dell'elica e farla traslare lungo di essa [6].

La modellazione generativa si rivela, in questo caso, uno strumento estremamente potente e utile sia per reiterare procedimenti sia per verificare teorie. Una superficie tangenziale, in realtà è sviluppabile con delle inevitabili approssimazioni, in quanto le due generatrici consecutive si intersecano sullo spigolo di regresso in un intorno infinitesimo, cioè con n tendente ad infinito. Nell'ambito di questa sperimentazione si è messa a punto una definizione che segue la logica geometrica per costruire rigate sviluppabili partendo da una curva gobba qualsiasi. La curva può essere importata o parametrizzata a seconda delle specifiche esigenze. La definizione consente di generare la superficie costruendo le n rette generatrici passanti per gli n punti in cui è stata divisa la curva assegnata (spigolo di regresso) e tangenti ad essa. Modificando la lunghezza della generatrice e lo spigolo di regresso si possono ottenere infinite sviluppabili. Tale superficie può essere tagliata per definire il bordo che, altrimenti, viene automaticamente generato in funzione della lunghezza della generatrice (fig. 6).

Costruzione di una striscia sviluppabile utilizzando due direttrici

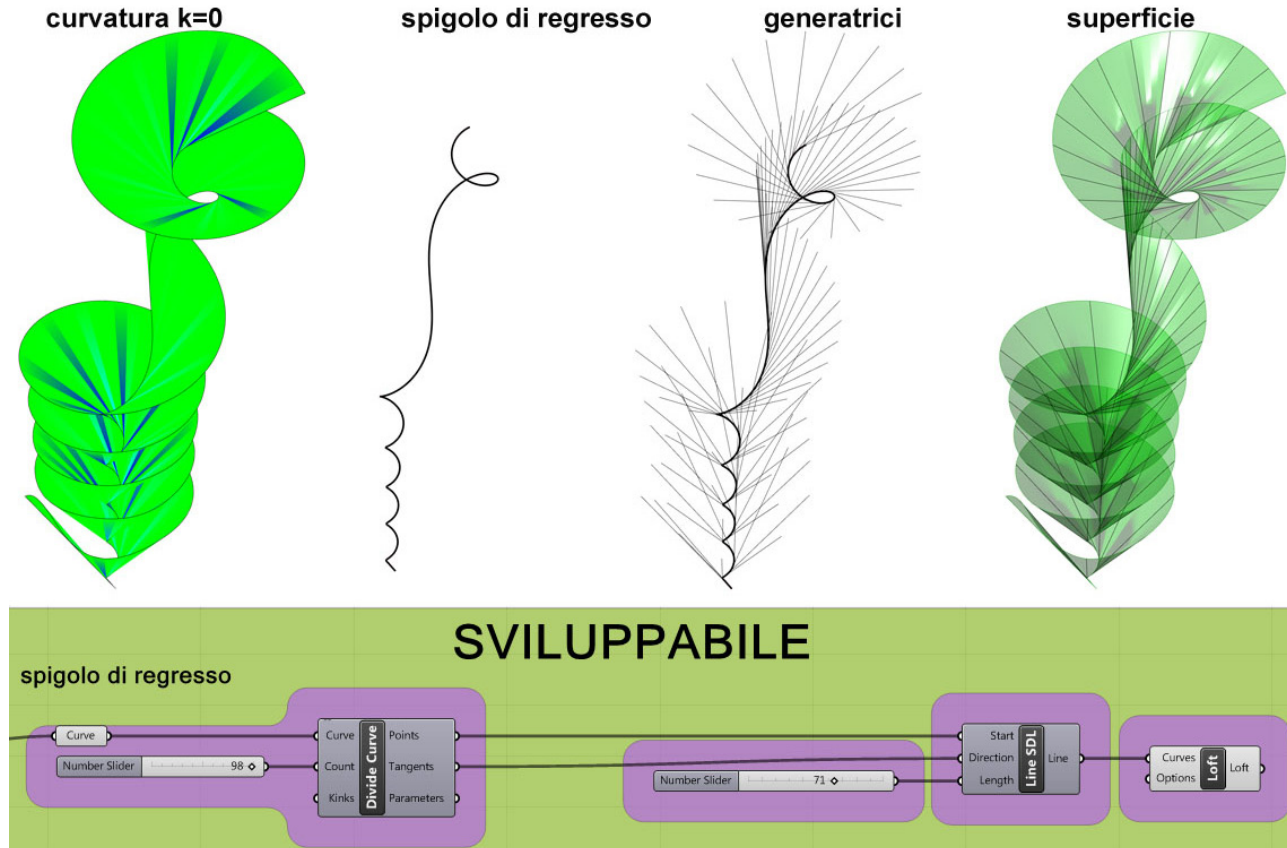
Più frequente è il caso in cui le strisce sviluppabili si costruiscono considerando due direttrici c e c' . Utilizzando i metodi della Geometria Descrittiva, per costruire una generatrice di una sviluppabile che si appoggia a due curve c e c' , si considera un punto P sulla curva c e si costruisce la

superficie conica di vertice P e direttrice c : la generatrice della sviluppabile si ottiene considerando il piano passante per P e tangente alla superficie conica. Infatti, tale piano individua sul cono la retta r , che è la generatrice della sviluppabile passante per P . Reiterando il procedimento si possono quindi ottenere n generatrici della superficie. In questo modo si dimostra che ogni generatrice di una sviluppabile ammette un unico piano tangente [Migliari 2009, pp. 213-218]. Questa importantissima proprietà geometrica delle superfici sviluppabili è stata fondamentale per definire l'algoritmo che consente di costruire un striscia sviluppabile assegnate due direttrici.

Assegnando arbitrariamente le due curve non sempre è possibile ottenere una superficie sviluppabile. Può accadere che le due curve, assegnate arbitrariamente, non siano "estese" a sufficienza o lo siano troppo e che in alcuni punti non sia possibile determinare la generatrice. In questo caso sarà necessario definire il dominio di esistenza della superficie (fig. 7).

In ambito digitale il problema sembra essere risolvibile in maniera immediata, ad esempio, utilizzando il comando *DevLoft* di Rhinoceros e assegnate due curve qualsiasi come direttrici si può generare automaticamente una striscia sviluppabile. Analizzando la superficie così ottenuta risulta che la curvatura

Fig. 6. Tangenziale, modello parametrico: l'approssimazione migliora ($k = 0$) aumentando il numero delle generatrici (definizione dell'autore).



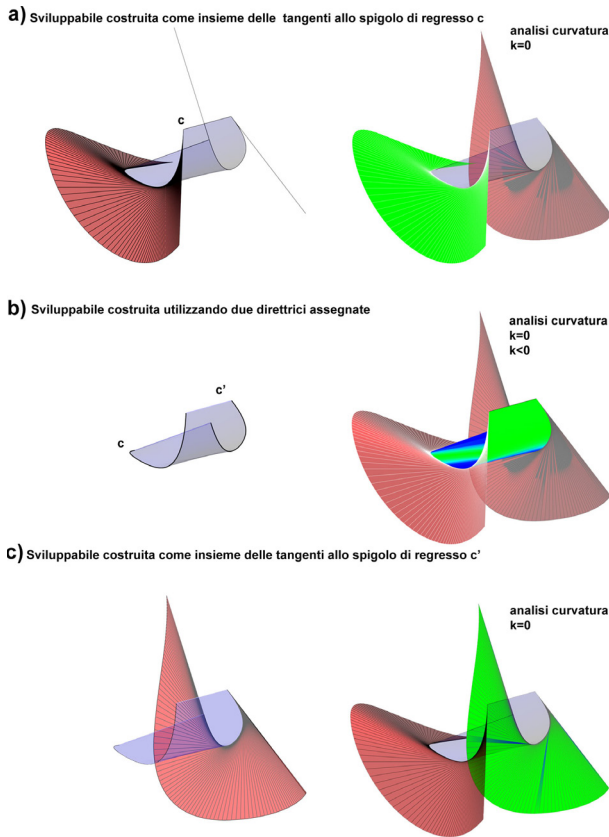


Fig. 7. Strisce sviluppabili costruite utilizzando due direttrici qualsiasi c e c' . Definizione del dominio di esistenza (elaborazione grafica dell'autore).

gaussiana, pur essendo generalmente nulla, in alcuni punti è negativa (fig. 7) e quindi la superficie non è sviluppabile. Uno degli inconvenienti del comando *DevLoft* è proprio quello di creare comunque una superficie rigata utilizzando tutta la lunghezza delle due curve assegnate arbitrariamente quindi, non sempre si ottiene una striscia perfettamente sviluppabile. Le soluzioni per risolvere il problema, utilizzando il software, possono essere varie e, ovviamente, dipendono dalle applicazioni specifiche. Una delle soluzioni possibili è sicuramente quella di estendere le curve e costruire la superficie analizzando la curvatura. In questo modo, per successive approssimazioni e correggendo le

curve fino ad ottenere superfici a curvatura nulla, si possono costruire strisce sviluppabili che potranno essere successivamente tagliate a seconda delle necessità.

Attraverso la modellazione algoritmica sono state messe a punto definizioni che consentono di modificare le direttrici, una in funzione dell'altra, in modo da garantire l'esistenza della sviluppabile.

In particolare, nell'ambito di questa ricerca è stata, portata avanti la sperimentazione per:

- la costruzione di una sviluppabile su due direttrici, c e c' , utilizzando la modellazione algoritmica [7];
- la determinazione dello spigolo di regresso ottenuta unendo a due a due le generatrici successive;
- la determinazione della tangenziale utilizzando lo spigolo di regresso;
- il confronto delle due superfici (fig. 8).

Questo procedimento può essere utilizzato sia per progettare una striscia, in modo che essa sia sicuramente sviluppabile (fig. 9) [Lanzara 2015, pp. 199-203] sia per determinarne lo sviluppo.

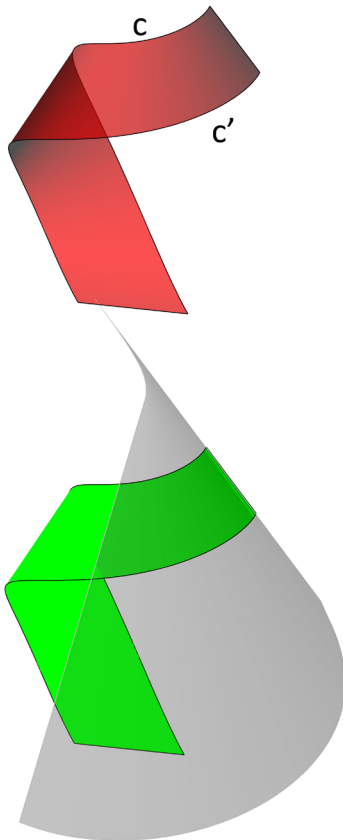
Determinazione dello sviluppo di una sviluppabile tangenziale

Come riportato precedentemente, una superficie è sviluppabile se può essere distesa su un piano con movimenti rigidi, senza rotture o sovrapposizioni: ciò è possibile se e solo se due generatrici consecutive sono complanari. Per definire i diversi approcci che consentono di determinare lo "sviluppo approssimato" di una superficie non sviluppabile sono stati analizzati i principi e i metodi utilizzati per definire lo sviluppo delle superfici sviluppabili e le tecniche di fabbricazione che possono "compensare" l'approssimazione insita nell'operazione di "spianamento" consentendo, in alcuni casi, la deformazione grazie a "rotture", *kerfing*, o "sovrapposizioni", *bending*.

Le superfici sviluppabili hanno curvatura gaussiana nulla, come già sottolineato, di conseguenza possono essere costruite con un materiale flessibile e non deformabile a partire dal loro sviluppo, mettendo in forma la sagoma ritagliata. Questi vantaggi evidenti, soprattutto in termini di fabbricabilità, hanno favorito la diffusione di questa tipologia di superfici. Nel caso delle superfici cilindriche l'angolo di regresso coincide con una direzione, quindi, le generatrici sono tutte incidenti in un punto improprio. Utilizzando il metodo tradizionale introdotto da Monge, per determinare lo sviluppo della superficie si divide in n parti la direttrice e si ottiene una superficie prismatica che, al limite (al tendere di n all'infinito), coincide con la superficie cilindrica. Disten-

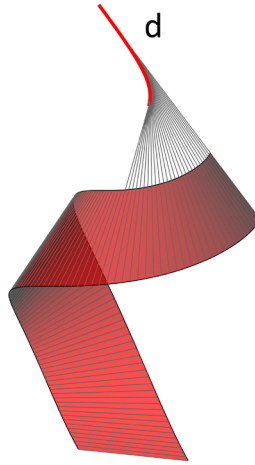
Fig. 8. Modello parametrico: confronto tra la striscia costruita utilizzando due direttrici e la tangenziale costruita con lo spigolo di regresso.

1. striscia su due direttrici c e c'

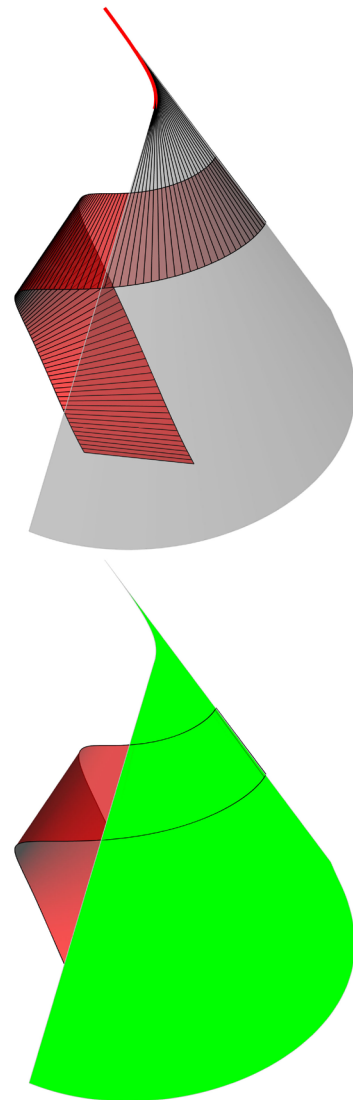


K=0 - curvatura della striscia

2. costruzione spigolo di regresso d



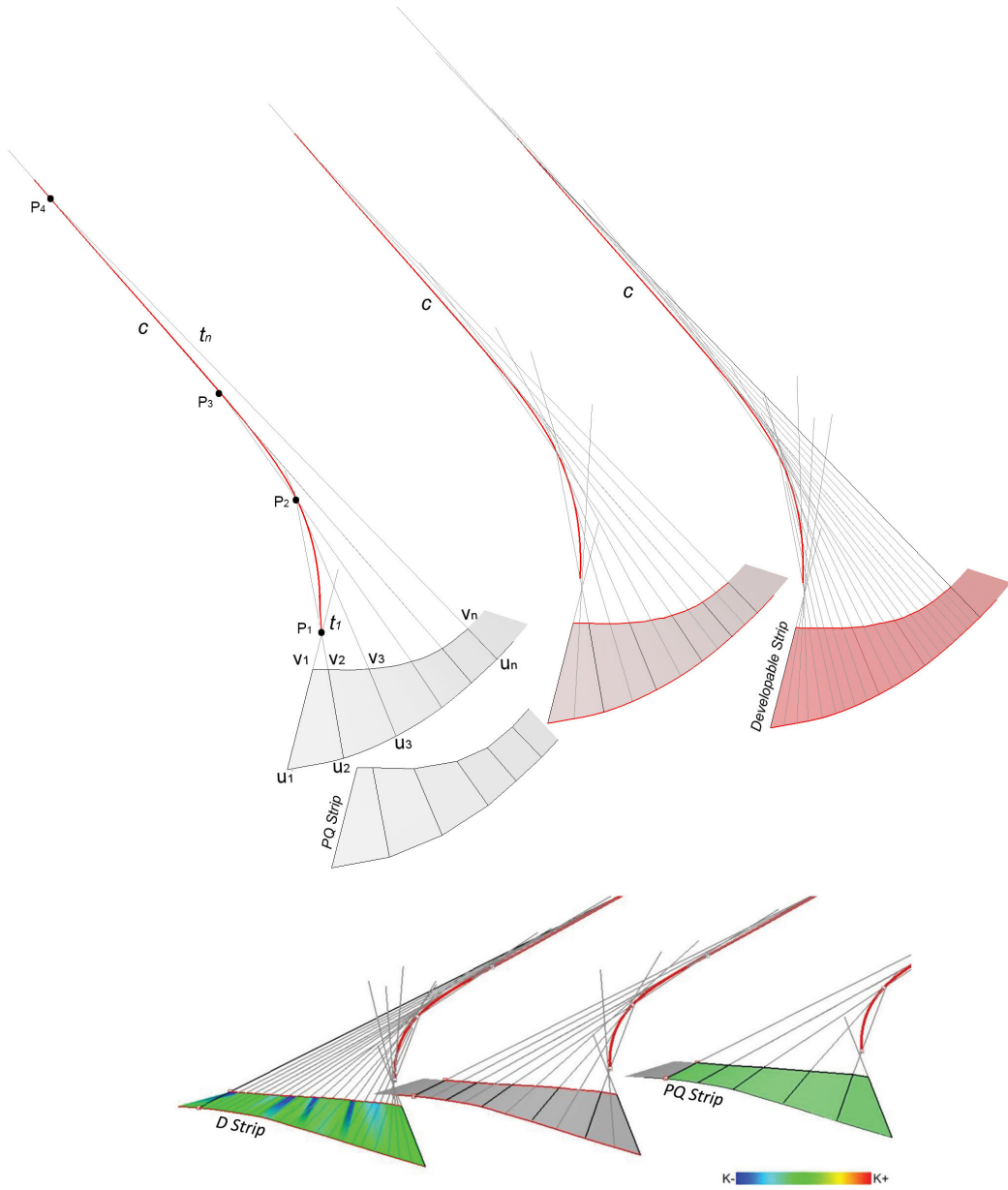
3. tangenziale su spigolo di regresso



K=0 - curvatura della tangenziale

4. analisi della curvatura gaussiana

Fig. 9. Processo di approssimazione per la progettazione di una striscia sviluppabile (elaborazione grafica di Emanuela Lanzara).



dedo le n facce quadrilatero in sequenza su un piano si ottiene lo sviluppo della superficie cilindrica.

Analogamente, le superfici coniche, possono essere considerate delle sviluppabili specializzate nelle quali lo spigolo di regresso è un punto proprio. Ne deriva che tutte le generatrici sono incidenti in tale punto. Quindi due generatrici consecutive, comunque considerate, sono sicuramente incidenti. Per definire lo sviluppo della superficie si suddivide la direttrice in n parti e si trasforma la superficie continua in una superficie poliedrica: una piramide a base poligonale. Distendendo le n facce triangolari in sequenza su un piano si ottiene lo sviluppo della superficie che sarà meglio approssimato al tendere di n all'infinito. In ambiente digitale esiste un comando dedicato in grado di sviluppare automaticamente sia le superfici coniche sia quelle cilindriche [8]. Più complesso è il procedimento per determinare lo sviluppo delle sviluppabili tangenziali, dove, l'applicazione dei principi della geometria differenziale è molto più evidente. Per studiare le proprietà delle superfici sviluppabili Monge utilizza i principi del calcolo differenziale [Migliari 2009, pp. 106-108]. Ogni sviluppabile può essere distesa sopra un piano senza deformazioni e, in una regione limitata, senza sovrapposizioni. La sviluppata della superficie generata dalle infinite tangenti ad una curva sghemba si ottiene considerando n generatrici e sviluppando nel piano i tratti di superficie compresi tra due generatrici consecutive. Per ottenere lo sviluppo della superficie, quindi, si considerano due tangenti consecutive t_1, t_2 (fig. 10) che, essendo incidenti, individuano un piano. Facendo ruotare t_2, t_3 intorno a t_2 , e ripetendo l'operazione per tutti i tratti successivi si ottiene lo sviluppo della superficie. La forma dello sviluppo dipende dallo spigolo di regresso e spesso accade che, per la configurazione della superficie, porzioni di superfici sviluppate si sovrappongano alle altre [Fallavollita 2008, p. 113]. Per poter procedere alla fabbricazione in questi casi, è necessario suddividere la superficie di progetto in parti. L'operazione di sviluppo, dunque, si esegue in modo agevole per le superfici coniche e cilindriche dove «il metodo rigoroso non può che desumersi dal calcolo» [Sereni 1826, p. 49] [9] in quanto il metodo approssimato si dimostra lungo e impreciso.

Interessante è, a tal proposito, l'approccio di Leroy che evidenzia l'importanza della conoscenza del risultato per distribuire gli errori. Lo studioso affronta il problema dello sviluppo della tangenziale generica, ed in particolare dell'elicoide sviluppabile, procedendo come per una superficie conica o cilindrica. Leroy afferma che «dividendo

una curva piana situata sulla superficie in piccoli archi sensibilmente confusi con le loro corde: allora i settori elementari proiettati potranno essere considerati come triangoli di maniera che... se si costruiscono questi triangoli sopra uno stesso piano ed allato gli uni degli altri, il loro insieme rappresenterà lo sviluppo della superficie in questione» [Leroy 1826, p. 289] (fig. 10). Egli sottolinea che la necessità di approssimare la superficie continua ad una superficie poliedrica dà luogo «alla contingenza di cumulare errori, i quali sparirebbero se si conoscesse anticipatamente la forma che dee prendere sullo sviluppo una certa curva data sulla superficie curvilinea [...] nell'elicoide sviluppabile avviene che tutte le eliche hanno per trasformata sullo sviluppo tanti cerchi concentrici» dunque, in questo caso particolare, lo spigolo di regresso si trasformerà in un cerchio il cui raggio, che dipende dal raggio di curvatura dell'elica (O_2A_2), potrà essere determinato sia utilizzando il calcolo differenziale sia graficamente. Per determinare lo sviluppo dell'elicoide una volta costruita la trasformata dell'elica, quindi, sarà sufficiente riportare da un qualsiasi punto della circonferenza, sulla retta tangente, la lunghezza della generatrice assegnata (per esempio A_2W_2) e tracciare un cerchio concentrico di raggio O_2W_2 (fig. 10).

Utilizzando la modellazione procedurale, e basandoci su questo principio teorico, si è messo a punto una definizione che consente di sviluppare l'elicoide utilizzando la curvatura dell'elica. Si è, inoltre, studiato un procedimento utile anche per determinare lo sviluppo di una tangenziale generica che si basa sul calcolo differenziale.

Dividendo lo spigolo di regresso in n parti e considerando le n tangenti (generatrici della rigata) si ha che due tangenti consecutive si possono considerare incidenti lungo lo spigolo di regresso. In realtà ciò è vero solo in un intorno piccolo, infinitesimo. Dividendo, infatti, lo spigolo di regresso in n parti e considerando due tangenti successive, t_1 e t_2 , condotte rispettivamente dai punti 1 e 2 (fig. 10) si definisce il quadrilatero sghembo $A12B$. Al tendere del punto 2 al punto 1, i punti 1, 2 e B possono considerarsi allineati, ne deriva che, per approssimazione, sarà sempre possibile definire una faccia piana triangolare e quindi sviluppare la superficie composta da n facce triangolari.

Se ne deduce che all'aumentare di n migliorerà l'approssimazione della superficie sviluppata rispetto a quella reale. Nell'ambito della ricerca sono stati sperimentati due procedimenti e, analizzando i risultati, è stato possibile valutare quale dei due consente di ottenere lo sviluppo che meglio approssima la superficie.

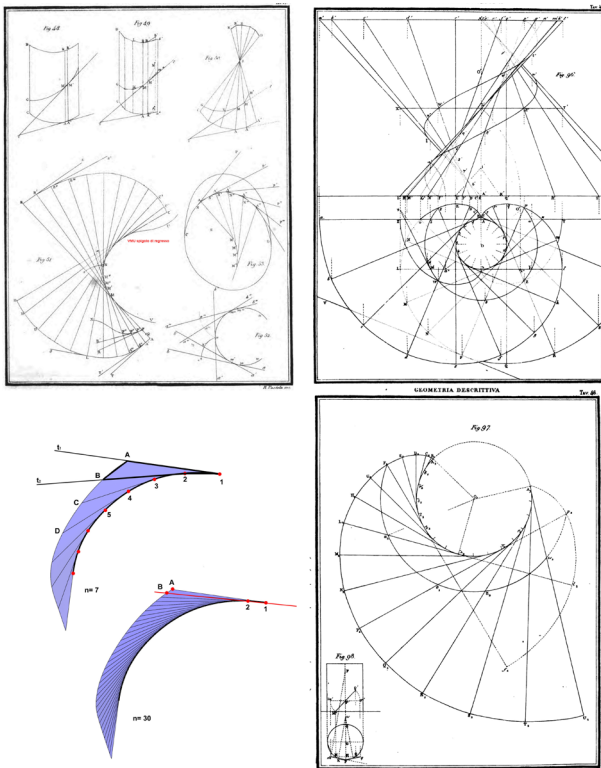


Fig. 10. Charles François Antoine Leroy: sviluppabile generica, elicoide sviluppabile e sviluppo. Discretizzazione in quadrilateri sghembi o in elementi triangolari.

Nel primo caso è stata divisa la superficie utilizzando le n tangenti ed è stata definita una superficie composta dalle rigate ottenute utilizzando a due a due le tangenti successive, $A1, B2, C3...$ (fig. 10c). Tali rigate, essendo costruite utilizzando i quadrilateri sghembi $A12B$, non sono sviluppabili, come teoricamente definito in precedenza. Esse sono state “spianate” utilizzando lo strumento *smash* che, in ambiente digitale, consente di determinare lo sviluppo approssimato di una superficie non sviluppabile. Collegando in sequenza le singole facce disposte su un piano è stato determinato lo sviluppo della superficie [10].

Nel secondo caso, considerando i punti $1, 2, B$ e $2, 3, C...$ allineati, la superficie è stata discretizzata, suddivisa nei triangoli

$AB1, BC2, CD3...$, ed è stata poi sviluppata sul piano. Infatti, in un intorno infinitesimo i punti $1, 2$ e B possono considerarsi allineati e quindi le due tangenti consecutive saranno incidenti nel punto 1 . Ne deriva che la faccia $A12B$ può essere considerata equivalente alla faccia triangolare IAB se n tende ad infinito (fig. 10c). Confrontando i valori metrici relativi alla lunghezza dei bordi e all'area della superficie 3D con i due sviluppi risulta che: nel primo caso la superficie sviluppata è maggiore di quella reale e nel secondo caso risulta essere minore. Ne deriva che, per costruire esattamente la forma utilizzando gli sviluppi così determinati, nel primo caso dovranno essere previste sovrapposizioni (*bending*) e nel secondo caso tagli (*kerfing*) e l'utilizzo di un materiale “deformabile”.

Determinare lo spianamento approssimato di una rigata a doppia curvatura

L'operazione di sviluppo è di fondamentale importanza per la costruzione di un oggetto, qualunque sia la sua scala: dalle opere di carpenteria metallica agli oggetti di design e, in generale, in tutti i casi in cui si costruisce un elemento a partire da una superficie piana che, opportunamente lavorata, sarà utilizzata per realizzare la forma desiderata. Risulta evidente, quindi, la necessità di conoscere lo sviluppo per il tracciamento in piano del contorno esatto della superficie da tagliare. Sviluppi approssimati, ma sufficientemente precisi per certe applicazioni pratiche, possono essere ottenuti anche per alcune superfici teoricamente non sviluppabili.

Si possono individuare diversi approcci per costruire una superficie a doppia curvatura utilizzando elementi piani che dipendono, ovviamente, dal tipo di oggetto, dal materiale e soprattutto dalle tecnologie utilizzate per la fabbricazione. La questione della determinazione dello sviluppo approssimato di una superficie complessa si può risolvere:

1. approssimando la superficie e dividendola in strisce sviluppabili, quindi individuando alcune linee notevoli sulla superficie in modo da ottimizzare il procedimento costruttivo;
2. progettando la superficie utilizzando strisce sviluppabili [Liu et al. 2006];

3. utilizzando procedimenti che rendano flessibile e deformabile il pannello (*kerfing* o *bending*) in modo da ottenere la forma progettata a partire da un elemento piano.

Un approfondimento sulle rigate non sviluppabili, ed in particolare sul paraboloido iperbolico, ha consentito di evidenziare alcune delle problematiche e di definire approcci possibili che possano guidare le operazioni necessarie a trasformare una superficie non sviluppabile in una superficie piana che, con migliore approssimazione, sia in grado di con-

Fig. 11. Modellazione procedurale: sperimentazione per la fabbricazione di un elicoide sviluppabile a partire dal suo sviluppo (elaborazione grafica dell'autore).

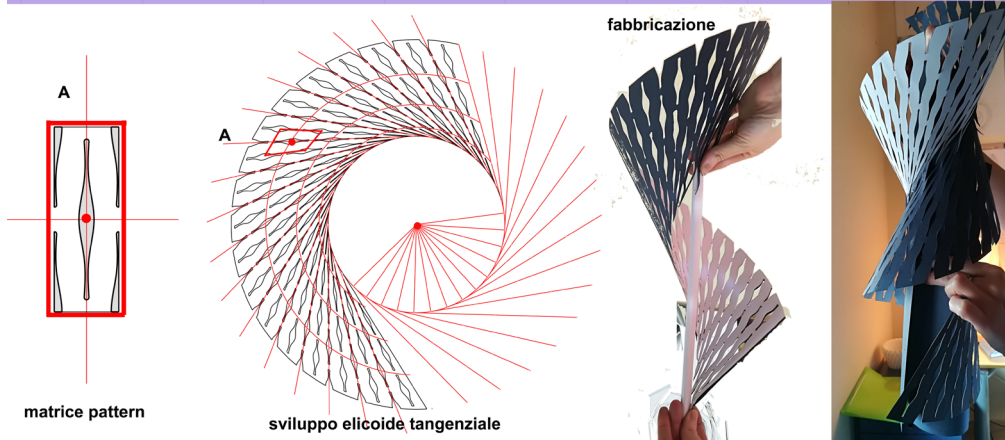
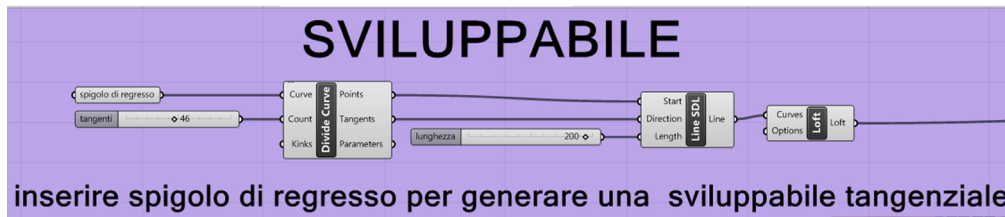
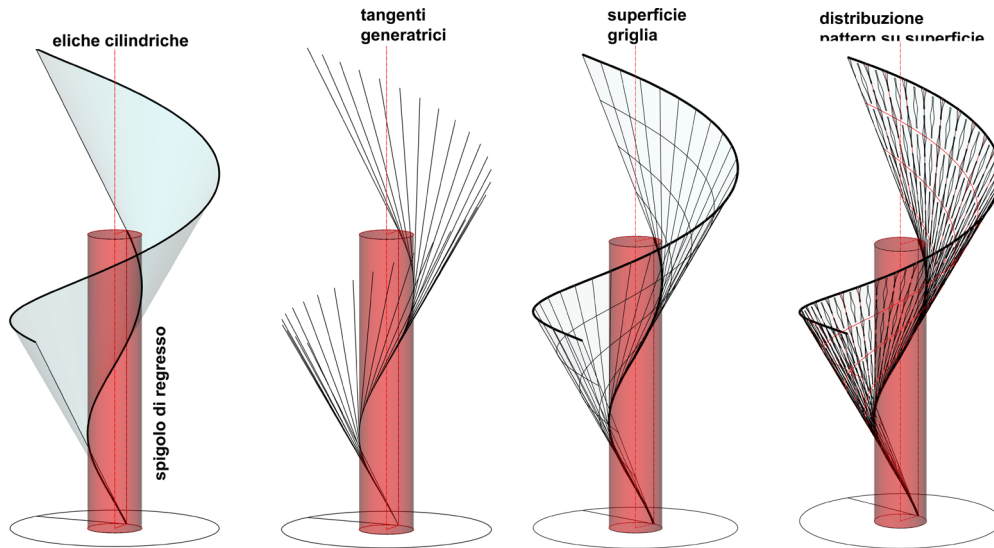
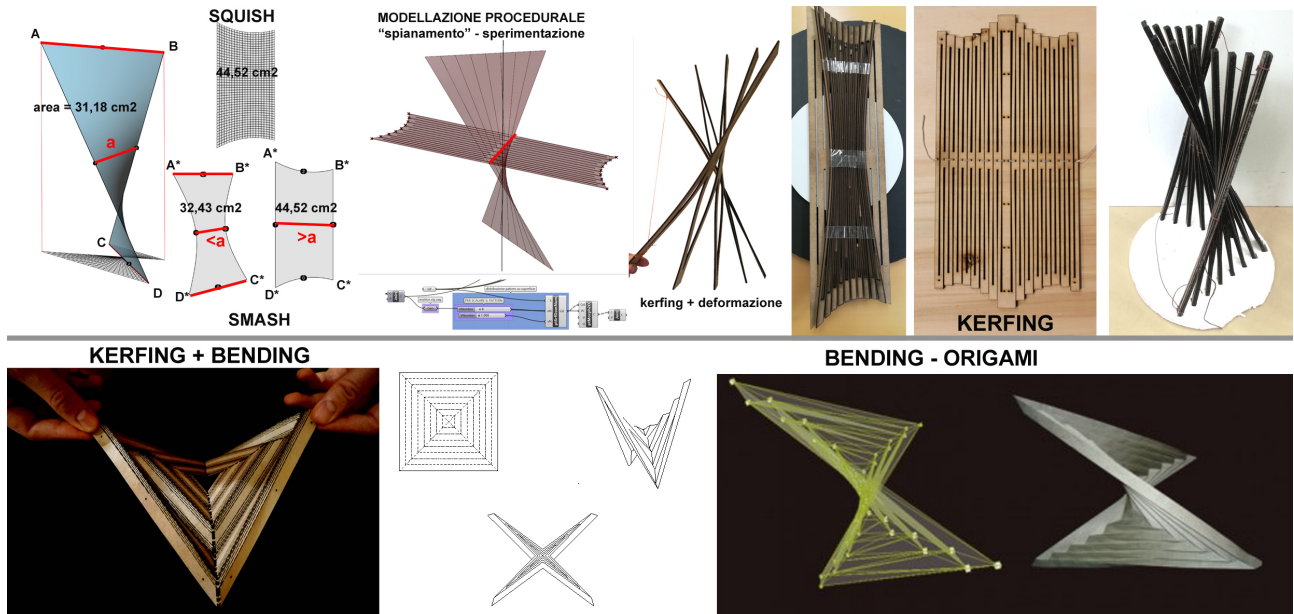


Fig. 12. Prototipi in legno e cartoncino per la costruzione di una lampada: porzioni di elicoide sviluppabili. Progetto di Mara Capone.



Fig. 13. Sperimentazione per la fabbricazione di un paraboloide iperbolico: esperimenti di kerfing e bending.



servare le caratteristiche della superficie stessa. Altro obiettivo fondamentale della ricerca è di evidenziare, attraverso le applicazioni, come questi approcci condizionino fortemente l'esito figurativo e soprattutto le modalità costruttive. Il paraboloide iperbolico è una rigata con due piani direttori con due schiere di generatrici parallele a tali piani. La superficie non è sviluppabile, in quanto due generatrici consecutive sono sempre sghembe, essendo parallele al piano direttore, e la curvatura è sempre negativa. In ambito digitale esistono diversi strumenti che consentono di ottenere automaticamente lo spianamento di una superficie non sviluppabile: in Rhinoceros i comandi *smash* e *squish* (fig. 12). L'analisi critica dei risultati ottenuti utilizzando questi strumenti è parte integrante della nostra sperimentazione. Con *smash* si può generare automaticamente uno sviluppo approssimato di una superficie a doppia curvatura ma, partendo da questo, si può ricostruire la forma di partenza solo utilizzando un materiale deformabile. Il comando *squish*, "appiattisci", utilizza un algoritmo diverso, esegue la spianatura di *mesh* o superfici NURBS 3D e modificando l'area di partenza consente la visualizzazione ed il controllo delle zone di compressione e di allungamento locale. Applicando i comandi *smash* e *squish* alla porzione di paraboloide iperbolico utilizzato per questa sperimentazione si sono ottenute due forme diverse (fig. 12) deducendo le seguenti osservazioni: l'area si modifica rispetto a quella reale e le generatrici di una delle due schiere si deformano incurvandosi in modo evidente. Da questo ne deriva che per passare dallo spianamento approssimato alla forma progettata si dovranno necessariamente prevedere rotture e/o sovrapposizioni. Infatti, se la generatrice *AD* si incurva, cioè si trasforma nel bordo curvo *A'D'* dello svi-

luppo, quest'ultimo dovrà essere deformabile, pertanto, i tagli dovranno essere fatti in modo da consentire che la curva *A'D'* possa assumere la configurazione rettilinea della forma progettata una volta che il pezzo sia messo in forma. Analogamente, se si deforma la generatrice *AB*, si dovrà consentire che la curva *A'B'* dello sviluppo si trasformi nel segmento rettilineo *AB* (fig. 12).

Utilizzando la modellazione generativa si sono sperimentate diverse metodologie per simulare la deformazione in funzione dei tagli effettuati con l'obiettivo di individuare i processi basati sulla conoscenza delle proprietà geometriche e mettere a punto strumenti per definire lo sviluppo approssimato di una superficie a doppia curvatura.

Conclusione e futuri sviluppi della ricerca

Il tema della costruzione di una forma a partire da una superficie piana è stato storicamente affrontato ed è alla base delle sperimentazioni che hanno come obiettivo la ricerca di soluzioni ottimizzate e che si fondano sulla geometria applicata. L'utilizzo degli strumenti di modellazione parametrica consente di affrontare il problema in tutta la sua complessità aprendo nuovi ambiti di sperimentazione e di ricerca basati su antichi principi la cui verifica è sempre meglio supportata dalla diffusione delle tecniche di fabbricazione digitale.

L'attività di ricerca parte dallo studio della geometria e degli strumenti di modellazione algoritmica e, ibridando diverse metodologie, tende a sviluppare soluzioni generali che, in quanto parametrizzate, potranno essere utilizzate in diversi ambiti.

Note

[1] Hachette propone una classificazione delle superfici in tre gruppi: le superfici sviluppabili, le superfici di rivoluzione e le rigate: «de surfaces qu'on vient de définir et qui sont désignées par le noms de surfaces developables, surfaces de révolution, surfaces réglées» [Hachette 1828, p. 30].

[2] Come è noto, il cerchio osculatore è il cerchio che meglio approssima una curva in un intervallo infinitesimo. La curvatura in un punto è l'inverso del raggio del cerchio osculatore $k=1/r$. Il piano osculatore in un punto *P* di una curva dello spazio, è la posizione limite assunta dal piano passante per la tangente in *P* alla curva e per un altro punto *Q* della curva stessa, al tendere di *Q* a *P*. Se consideriamo un punto *P* di una curva sghemba, il piano osculatore è il piano individuato dal vettore tangente *t* in *P* e dal vettore normale *n*.

[3] «Notissima est proprietas cylindri et conii, qua eorum superficiem in planum explicare licet atque ad eo haec proprietas ad omnia corpora cylindrical et coni-

ca extenditur, quorum bases figuram habeant quamcumque; contra vero sphaera hac proprietate destituitur, quum eius superficies nullo modo in planum explicari neque superficie plana obducatur; ex quo nascitur quaestio aequae curiosa acnotatudigna, utrum praeterconos et cylindros alia quoque corporum genera existant, quorum superficiem itidem in planum explicare liceat nec ne? Quamobrem in hac disertatione equens considerare constitui Problema: Invenire aequationem generalem pro omnibus solidis, quorum superficiem in planum explicare licet, cuius solutionem variis modis sum aggressurus» [Euler 1772].

[4] Le ricerche più avanzate per la costruzione di superfici complesse si svolgono nell'ambito della geometria applicata. Una delle possibili soluzioni consiste nel dividere la superficie in parti che possono essere realizzate per approssimazione utilizzando strisce sviluppabili. Questo procedimento offre notevoli vantaggi in termini di fabbricazione della superficie che potrà essere costruita utilizzando elementi piani da mettere in forma.

[5] Nelle sue prime lezioni di Geometria Descrittiva, Gaspard Monge insegna una elegante «dimostrazione esistenziale» delle superfici rigate, generate dal moto di una retta che si appoggia a tre generiche curve sghembe assunte come direttrici [Migliari 2009, p. 154].

[6] Ad esempio, con Rhinoceros, si può utilizzare il comando *sweep* ad *l binario*.

[7] Per costruire la striscia abbiamo utilizzato la definizione *Tapeworm script* by *Mårten Nettelbladt* che consente di modificare le due direttrici garantendo l'esistenza della sviluppabile.

[8] Con il comando *Unroll*, Rhinoceros consente di sviluppare le superfici sviluppabili. Si sviluppano automaticamente superfici coniche, superfici cilindriche e strisce ottenute assegnando due direttrici. Si presentano al-

cuni problemi per sviluppare una tangenziale generica, nonostante sia una superficie sviluppabile.

[9] Sereni è un sostenitore del metodo analitico, infatti egli afferma che «i metodi approssimativi sono essi medesimi soverchiamente lunghi, e di sì raro uso nelle arti che non meritano d'arrestarci davvantaggio [...] in ultima analisi tutti si ridurrebbero a costruire lo sviluppo di una superficie poliedrica [...] e quanto minore fossero gli angoli tanto più il lavoro si accosterebbe alla precisione» [Sereni 1826, p. 49].

[10] Utilizzando algoritmi generativi lo sviluppo della superficie rigata tangenziale è stato determinato dividendo in n parti (variabili) lo spigolo di regresso e costruendo le tangenti alla curva passanti per gli n punti così determinati. È stata poi determinata la superficie generata dalle tangenti successive.

Autore

Mara Capone, DiArc Dipartimento di Architettura, Università degli Studi di Napoli Federico II, mara.capone@unina.it

Riferimenti bibliografici

Euler, L. (1772). De solidis quorum superficiem in planum explicare licet. In *Novi commentarii academiae scientiarum imperialis Petropolitanae*. XVI. pp. 3-34.

Fallavollita, F. (2008). *Le superfici rigate e le superfici sviluppabili. Una rilettura attraverso il laboratorio virtuale*. Tesi di dottorato di ricerca in Scienze della Rappresentazione e del Rilievo. Tutor: L. De Carlo, R. Migliari. Sapienza Università di Roma, Dipartimento di Rilievo, Analisi, Disegno dell'Ambiente e dell'Architettura.

Gauss, K.F. (1902). *General Investigations of Curved Surfaces of 1827 and 1825, translated with notes and a bibliography by James Caddal Moreheas and Adam Miller Hildebeitel*. Princeton: The Princeton University Library.

Hachette, J.N.P. (1828). *Traité de Géométrie Descriptive*. Paris: Corby.

Lanzara, E. (2015). *Paneling Complex Surfaces. Razionalizzazione di superfici complesse per l'industrializzazione*. Tesi di dottorato di ricerca in Tecnologia dell'Architettura e rilievo e rappresentazione dell'architettura e dell'ambiente. Tutor: M. Capone, cotutor: A. Picerno Ceraso. Università degli Studi di Napoli Federico II.

Leroy, C.F.A. (1846). *Trattato di Geometria Descrittiva con una collezione di disegni composta da 60 tavole*. Traduzione dal francese con note di Salvatore d'Ayala e Paolo Tucci, Napoli: Dalla Reale Tipografia della Guerra. (Prima ed. *Traité de géométrie descriptive*, Parigi 1842).

Liu, Y. et al. (2006). Geometric Modeling with Conical Meshes and Developable Surfaces. In *ACM Transactions on Graphics*, 25, 3, pp. 681-689.

Migliari, R. (2009). *Geometria descrittiva*. Roma: CittàStudi.

Monge, G. (1780). Mémoire sur les propriétés de plusieurs genres de surfaces courbes et particulièrement sur celles des surfaces développables avec une application à la théorie générale des ombres et des pénombres. In *Mém. div. Sav.*, t. 9, pp. 382-440.

Monge, G. (1785). *Mémoire sur les développées, les rayons de courbure, et les différens genres d'inflexions des courbes a double courbure*. Paris: De l'Imprimerie Royale.

Monge, G. (1798). *Géométrie Descriptive*. Paris: Baudouin.

Monge, G. (1801). *Feuilles d'analyse appliquée à la géométrie, appliquée à la géométrie à l'usage de l'Ecole Polytechnique*. Paris: Baudouin.

Quintial, F.G., Barrallo, J., Artiz Elkarte, A. (2015). Freeform surfaces adaptation using developable strips and planar quadrilateral facets. In *Journal of Facade Design and Engineering*, 3, pp. 59-70.

Sereni, C. (1826). *Trattato di Geometria Descrittiva*. Roma: Nella Stamperia di Filippo e Nicola De Romanis.

Snežana, L. (2011). Developable Surfaces: Their History and Application, In *Nexus Network Journal*, 13, pp. 701-714.

Tang, C., Bo, P., Wallner, J., Pottmann, H. (2016). Interactive design of developable surfaces. In *ACM Transactions on Graphics*, 35, 2, Article 12: <<http://www.geometrie.tugraz.at/wallner/abw.pdf>> (consultato il 23 ottobre 2018).